$\boxed{\textbf{CINQUIEME PARTIE}}$

Intégration sur $\mathbb{Z}_p$

Comme application des principes mis en oeuvre dans cet ouvrage nous présentons dans cette avant-dernière partie une théorie de l'intégration des fonctions et des mesures *réelles* ou *complexes* sur $\mathbb{Z}_p$. En particulier l'existence d'une mesure de Haar *réelle* sur $\mathbb{Z}_p$ permet de recycler sans grand changement la théorie des mesures sur $[a,b]$.

On remarquera qu'il n'est fait aucune allusion aux *pseudo-mesures* : c'est parce que sur $\mathbb{Z}_p$ les fonctions étagées sont continues, donc que l'espace des fonctions réglées *coïncide* avec l'espace des fonctions continues, donc que le concept de pseudo-mesure *s'identifie* au concept de mesure.

CHAPITRE XX

MESURES ET FONCTIONNELLES SUR $\mathbb{Z}_p$

§ 1. Définitions et notations

$\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}$ $\boxed{a \lceil b}$ signifie $\boxed{\text{“} a \text{ divise } b \text{”}}$,

$\boxed{a \not\lceil b}$ signifie $\boxed{\text{“} a \text{ ne divise pas } b \text{”}}$.

$\mathcal{C}_p =$ algèbre des fonctions : $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ continues

$\mathcal{F}_p =$ algèbre des fonctions : $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ bornées

Notation : $\forall\, f \in \mathcal{F}_p$ on note $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|$.

1.1. Définition : On note $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ $\mathrm{B}(u\,,\ell) = u + p^{\ell}\,\mathbb{Z}_p$; c'est la boule de “centre” u et de “rayon” $1/p^{\ell}$; on a $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ $\mathrm{B}(u\,,0) = \mathbb{Z}_p$.

1.2.* Théorème : Tout point d'une boule de $\mathbb{Z}_p$ est centre de cette boule.
Deux boules de $\mathbb{Z}_p$ sont soit disjointes soit incluses l'une dans l'autre.
L'ensemble des boules de $\mathbb{Z}_p$ est dénombrable.

1.3.* Théorème :

$\forall\, u\,,\, v \in \mathbb{Z}_p$ $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ $\Big[\, \mathrm{B}(u\,,\ell) = \mathrm{B}(v\,,\,\ell) \;\Leftrightarrow\; u \in \mathrm{B}(v\,,\,\ell) \,\Big]$.

1.4. Définition : On note $\mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,\ell)}$ la fonction égale à 1 sur $\mathrm{B}(u,\ell)$ et à 0 sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p} - \mathrm{B}(u,\ell)$; c'est la fonction indicatrice de la boule $\mathrm{B}(u,\ell)$.

Une combinaison linéaire (réelle et finie) de fonctions indicatrices de boules de $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$ s'appelle une fonction étagée. On note $\mathcal{E}_p$ l'espace vectoriel des fonctions étagées.

1.5.* Théorème : $\boxed{\mathcal{E}_p \subset \mathcal{C}_p \subset \mathcal{F}_p}$

Compte tenu de ce théorème le concept de fonction réglée n'est pas significatif sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$: il coïncide avec le concept de fonction continue.

1.6.* Théorème : $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{F}_p$ sont des algèbres de Riesz.

§ 2. Intégrale de Haar des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$

2.1. Lemme :

$$f \in \mathcal{C}_p \Leftrightarrow \Big[\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall u, v \in \mathbb{Z}_\mathrm{p} \ \big|f(u+v\,p^m) - f(u)\big| \leq \varepsilon\Big]$$

Dém :

a) $\Rightarrow$: $\mathcal{C}_p$ est compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$; il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall u, w \in \mathbb{Z}_\mathrm{p}$ $\Big[|w|_p \leq \eta \Rightarrow \big|f(u+w) - f(u)\big| \leq \varepsilon\Big]$; choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/p^m \leq \eta$; alors on a bien $\forall u, v \in \mathbb{Z}_\mathrm{p}$ $\big|f(u+v\,p^m) - f(u)\big| \leq \varepsilon$.

b) $\Leftarrow$: Trivial.

2.2. Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}_p$; alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r)}$ existe ; on note cette limite $\boxed{\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} f(x)\,\delta x}$ et on l'appelle l'intégrale de Haar de f.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u, v \in \mathbb{Z}_\mathrm{p}$ $\big|f(u+v\,p^m) - f(u)\big| \leq \varepsilon$;

on a $\forall n > m$ $$\frac{1}{p^m}\sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) = \frac{1}{p^n}\Big[p^{n-m}\sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r)\Big]$$

$$= \frac{1}{p^n}\Big[p^{n-m}\sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \sum_{r=0}^{p^m-1}\sum_{s=0}^{p^{n-m}-1} f(r+s\,p^m)\Big]$$

$$= \frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^m-1}\Big[p^{n-m} f(r) - \sum_{s=0}^{p^{n-m}-1} f(r+s\,p^m)\Big] = \frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^m-1}\sum_{k=0}^{p^{n-m}-1}\big[f(r) - f(r+k\,p^m)\big] ;$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $$\Big|\frac{1}{p^m}\sum_{r=0}^{p^m-1} f(r) - \frac{1}{p^n}\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r)\Big| \leq \varepsilon.$$

2.3.* <u>Théorème</u> : $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}\ \delta x = 1$.

2.4.* <u>Théorème</u> : $\forall f \in \mathcal{C}_p$ on a $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|\ \delta x = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

2.5.* <u>Théorème</u> : $\forall f, g \in \mathcal{C}_p$ on a $\boxed{f \leq g \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x \leq \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)\ \delta x}$.

On se donne désormais $f \in \mathcal{C}_p$.

2.6.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\left|\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x\right| \leq \int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|(x)\ \delta x \leq \|f\|}$.

2.7. <u>Théorème</u> : $\forall u \in \mathbb{Z}_p$ $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+u)\ \delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x}$.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $u = k \in \mathbb{N}$; alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r+k) = \frac{1}{p^n} \sum_{r=k}^{p^n+k-1} f(r) = \frac{1}{p^n} \left[\sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) + \sum_{r=p^n}^{p^n+k-1} f(r) \right] ;$$

en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+k)\ \delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x$.

Supposons maintenant $u \in \mathbb{Z}_p$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall v, w \in \mathbb{Z}_p$ $\left| f(v + w\, p^m) - f(v) \right| \leq \varepsilon$; soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u - k \in p^m\, \mathbb{Z}_p$;

alors on peut écrire $\forall r \in \mathbb{N}$ $\left| f(r+u) - f(r+k) \right| \leq \varepsilon$; donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$\displaystyle\left| \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r+u) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r+k) \right| \leq \varepsilon$; en faisant $n \to +\infty$ on obtient

$\displaystyle\left| \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+u)\ \delta x - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x \right| \leq \varepsilon$.

2.8. <u>Théorème</u> : Soit $u \in \mathbb{Z}_p$ tel que $|u|_p = 1$; alors $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(ux)\ \delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\ \delta x}$

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall v, w \in \mathbb{Z}_p$ $\left| f(v + w\, p^m) - f(v) \right| \leq \varepsilon$.

Supposons d'abord $u = k \in \mathbb{N}^*$; on a $p \nmid k$; soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; effectuons

$\forall r \in [\![1, p^n - 1]\!]$ la division euclidienne de $k\, r$ par p^n ; on pose $k\, r = s_r + t_r\, p^n$

avec $s_r, t_r \in \mathbb{N}^*$ et $s_r \leq p^n - 1$.

Montrons que $r_1 = r_2 \Leftrightarrow s_{r_1} = s_{r_2}$; en effet supposons $s_{r_1} = s_{r_2}$; alors

$p^n \lceil k\,(r_1 - r_2)$ donc $p^n \lceil r_1 - r_2$; or $|r_1 - r_2| \le p^n - 1$, donc $r_1 = r_2$.

On peut donc écrire $\{ s_i \parallel 1 \le i \le p^n - 1 \} = [[1\,,\, p^n - 1]]$; on en déduit $\forall\, n \ge m$

$$\Big|\, \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(k\,r) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r) \,\Big| = \Big|\, \frac{1}{p^n} \sum_{r=1}^{p^n-1} f(s_r + t_r\, p^n) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=1}^{p^n-1} f(s_r) \,\Big| \le \varepsilon \;;$$

en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\left| \int_{\mathbb{Z}_p} f(k\,x)\,\delta x - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\delta x \right| \le \varepsilon$.

Supposons maintenant $u \in \mathbb{Z}_p$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u - k \in p^m\,\mathbb{Z}_p$; on a $\forall\, n \ge m$

$$\Big|\, \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(ur) - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(k\,r) \,\Big| = \Big|\, \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f\,[\,kr + (u-k)\,r\,] - \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(kr) \,\Big| \le \varepsilon \;;$$

en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\left| \int_{\mathbb{Z}_p} f(u\,x)\,\delta x - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\delta x \right| \le \varepsilon$.

2.9. <u>Théorème</u> : $\boxed{\left[\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, g(x)\,\delta x \right]^2 \le \int_{\mathbb{Z}_p} f^2(x)\,\delta x \int_{\mathbb{Z}_p} g^2(x)\,\delta x}$.

<u>Dém</u> : $\left[\frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f(r)\, g(r) \right]^2 \le \left[\frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} f^2(r) \right] \left[\frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} g^2(r) \right]$; il suffit ensuite de faire $n \to +\infty$.

2.10. <u>Corollaire</u> : $\boxed{\left[\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\delta x \right]^2 \le \int_{\mathbb{Z}_p} f^2(x)\,\delta x}$.

2.11. <u>Définition</u> : $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ on pose $\int_{\mathrm{B}(u,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} 1\!\!1_{\mathrm{B}(u,\,\ell)}(x)\, f(x)\,\delta x$.

2.12. <u>Théorème</u> : $\boxed{\int_{\mathrm{B}(u,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \frac{1}{p^\ell} \int_{\mathbb{Z}_p} f(u + p^\ell x)\,\delta x}$.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $u = k \in \mathbb{N}^*$; on a $\int_{\mathrm{B}(k,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \int_{\mathbb{Z}_p} 1\!\!1_{\mathrm{B}(k,\,\ell)}(x)\, f(x)\,\delta x$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{r=0}^{p^n-1} 1\!\!1_{\mathrm{B}(k,\,\ell)}(r)\, f(r) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{0 \le s < (p^n - k - 1)/p^\ell} f(k + s\,p^\ell)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^{n-\ell}} f(k + s\,p^\ell) = \frac{1}{p^\ell} \int_{\mathbb{Z}_p} f(k + p^\ell x)\,\delta x\,.$$

Supposons maintenant $u \in \mathbb{Z}_p$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $\underline{m \geq \ell}$ tel que $\forall\, v\,,\, w \in \mathbb{Z}_p$

$\left| f(v + w\,p^m) - f(v) \right| \leq \varepsilon$; soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u - k \in p^m\, \mathbb{Z}_p$; alors $k \in \mathrm{B}(u\,,\ell)$,

donc $\mathrm{B}(u\,,\ell) = \mathrm{B}(k\,,\ell)$, donc $\displaystyle\int_{\mathrm{B}(u\,,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \int_{\mathrm{B}(k\,,\,\ell)} f(x)\,\delta x = \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbb{Z}_p} f(k + p^\ell x)\,\delta x$.

On en déduit

$$\left| \int_{\mathrm{B}(u\,,\,\ell)} f(x)\,\delta x - \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbb{Z}_p} f(u + p^\ell x)\,\delta x \right| = \left| \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbb{Z}_p} f(k + p^\ell x)\,\delta x - \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbb{Z}_p} f(u + p^\ell x)\,\delta x \right|$$

$$\leq \frac{1}{p^\ell}\int_{\mathbb{Z}_p} \left| f(k + p^\ell x) - f(u + p^\ell x) \right| \delta x \leq \varepsilon / p^\ell .$$

2.13. <u>Définition</u> : Une partie A de $\mathbb{Z}_p$ est <u>élémentaire</u> ssi elle est constituée d'une réunion finie disjointe de boules B_i de $\mathbb{Z}_p$; on pose alors $\displaystyle\int_{\mathrm{A}} f(x)\,\delta x = \sum_i \int_{\mathrm{B}_i} f(x)\,\delta x$.

§ 3. <u>Espaces fondamentaux</u>

La théorie des mesures et des fonctionnelles sur $[\mathrm{a,b}]$ se transpose aisément à $\mathbb{Z}_p$, avec de plus la circonstance simplificatrice que $\mathcal{R}_p = \mathcal{C}_p$, c-à-d que le complété de $\mathcal{E}_p$ pour la norme $\|\ \|$ est $\mathcal{C}_p$. Reprenons les principales étapes de la théorie.

Sur $\mathcal{C}_p$ il y a trois <u>normes</u> fondamentales : outre la norme $\|\ \|$, on pose $\forall\, f \in \mathcal{C}_p$

$\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} |f(x)|\,\delta x$ et $\|f\|_2 = \left[\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f^2(x)\,\delta x\right]^{1/2}$; on a $\boxed{\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|}$.

> Le N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}_p\,,\|\ \|\big)$ se note $\mathcal{M}_p$ et ses éléments s'appellent les <u>mesures</u> sur $\mathbb{Z}_p$.

Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p$ s'étend canoniquement à $\mathcal{C}_p$ en posant $\forall\, f \in \mathcal{C}_p$

$$\boxed{\tilde{\mu}(f) = \lim_n \tilde{\mu}(f_n) \quad \text{avec} \quad f_n \in \mathcal{E}_p \quad \text{et} \quad f_n \overset{\mathbf{u}}{\to} f}\,.$$

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p \quad \forall\, f \in \mathcal{C}_p$ on note $\boxed{\tilde{\mu}(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,\tilde{\mu}(x)}$.

$\forall\, f \in \mathcal{C}_p$ la forme linéaire $\boxed{\{f\} : \mathcal{C}_p \to \mathbb{R} : g \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,g(x)\,\delta x}$ est la mesure <u>associée</u> à f. On note $\underline{\mathcal{E}_p} = \big\{\{f\} \,\big\|\, f \in \mathcal{E}_p\big\} \subset \underline{\mathcal{C}_p} = \big\{\{f\} \,\big\|\, f \in \mathcal{C}_p\big\} \subset \mathcal{M}_p$.

La mesure $\boxed{\{1\!\!1\} \,:\, \mathcal{C}_p \to \mathrm{I\!R} \,:\, g \mapsto \int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} g \;\delta x}$ est la $\boxed{\text{mesure de Haar}}$ sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$.

Dans $\mathcal{M}_p$ on définit la norme $\|\ \|_\star$, duale de la norme $\|\ \|$, en posant $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p$ $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star \;=\; \sup_{g \in \mathcal{E}_p\,,\, \|g\| = 1} |\tilde{\mu}(g)|}$. La norme $\|\ \|_\star$ prolonge la norme $\|\ \|_1$ sur $\underline{\mathcal{C}_p}$.

On note $\mathcal{L}^1_p$ la fermeture de $\underline{\mathcal{E}_p}$ dans $\mathcal{M}_p$. On a $\underline{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{L}^1_p$. Les éléments de $\mathcal{L}^1_p$ s'appellent les <u>fonctionnelles sommables</u> sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$. On note $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_p$ $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \|\tilde{f}\|_\star}$.

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_p$ on écrit $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \tilde{f}(x)\;\delta x$ au lieu de $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \tilde{f}(x)$. on a donc

$$\boxed{\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \tilde{f}(x)\;\delta x = \int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \tilde{f}(x) \;=\; \tilde{f}(1\!\!1)} \quad (\text{avec } 1\!\!1 = 1\!\!1_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}}).$$

Le N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}_p\,,\, \|\ \|_2\big)$ se note $\mathcal{L}^2_p$ et ses éléments s'appellent les <u>fonctionnelles hilbertiennes</u> sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$.
Le N-dual de l'espace normé $\big(\mathcal{E}_p\,,\, \|\ \|_1\big)$ se note $\mathcal{B}_p$ et ses éléments s'appellent les <u>fonctionnelles bornées</u> sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$.

On a $\underline{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{B}_p \subset \mathcal{L}^2_p \subset \mathcal{L}^1_p$ et la norme sur $\mathcal{L}^2_p$ se note encore $\|\ \|_2$ car elle prolonge la norme $\|\ \|_2$ sur $\underline{\mathcal{C}_p}$; de plus $\underline{\mathcal{E}_p}$ est dense dans $\mathcal{L}^2_p$.

On note $\|\ \|_\mathrm{B}$ la norme sur $\mathcal{B}_p$; on a $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}_p$ $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 \le \|\tilde{f}\|_2 \le \|\tilde{f}\|_\mathrm{B}}$.

$\mathcal{M}_p$ et $\mathcal{L}^1_p$ sont des espaces de Riesz-Banach ; $\mathcal{L}^2_p$ est un espace de Riesz-Hilbert ; $\mathcal{B}_p$ est une algèbre de Riesz-Banach.

L'ensemble $\mathcal{K}_p$ des <u>fonctionnelles caractéristiques</u> et l'espace $\mathcal{N}_p$ des <u>fonctionnelles totalement singulières</u> se définissent comme sur $[\,a\,,b\,]$.

On peut énoncer le théorème de Radon-Nikodym : $\boxed{\mathcal{M}_p = \mathcal{L}^1_p \oplus \mathcal{N}_p}$.

On définit aussi les espaces $\mathcal{BA}_p$ et $\mathcal{W}_p$, respectivement des <u>fonctions de Baire</u> et des <u>fonctions universelles</u> sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$.

Tous les espaces décrits précédemment vérifient les mêmes propriétés que leurs correspondants sur $[\,a\,,b\,]$; quant aux démonstrations elles se transposent quasiment sans changement. De plus on dispose toujours des incontournables théorèmes de convergence <u>monotone</u> et <u>bornée</u>.

Finalement on construit l'algèbre de Riesz $\mathcal{FO}_p$ des <u>fonctionnelles</u> (générales) sur $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$, et on développe la même théorie à leur sujet que pour $[\,a\,,b\,]$.

Récapitulatif

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & \mathcal{F}_p & & & & & & \mathcal{FO}_p & & \\ & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & \\ \mathcal{E}_p & \subset & \mathcal{C}_p & \subset & \mathcal{BA}_p & \subset & \mathcal{W}_p & \hookrightarrow & \mathcal{B}_p & \subset & \mathcal{L}^2_p & \subset & \mathcal{L}^1_p & \subset & \mathcal{M}_p \\ & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup \\ & & & & & & & & \mathcal{K}_p & & & & & & \mathcal{N}_p \end{array}}$$

La théorie s'étend à $\mathbb{Z}_\mathrm{p} \times \mathbb{Z}_\mathrm{p}$ et permet de démontrer le théorème de Fubini.

Ces résultats se généralisent sans difficulté à des fonctions ou des mesures complexes ; nous utiliserons pour les espaces correspondants les notations $\widehat{\mathcal{C}_p}$, etc ...

§ 4. Moyenne d'une mesure sur une boule

4.1. Définition : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}\quad \forall\, v \in \mathbb{Z}_\mathrm{p}\quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}$ on pose

$$\boxed{\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v) = p^\ell\, \tilde{\mu}(\mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}) = p^\ell \int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)\, \tilde{\mu}(x)}\,.$$

$\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v)$ est la moyenne de $\tilde{\mu}$ sur la boule $\mathrm{B}(v,\ell)$.

4.2. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu}) \in \widehat{\mathcal{E}_p}$ et $\big\|\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})\big\| \le p^\ell\, \|\tilde{\mu}\|_\star$.

Dém : Il existe exactement p^ℓ boules (disjointes) de "rayon" p^ℓ ; $\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})$ est constant sur chacune d'entre elles, donc $\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu}) \in \widehat{\mathcal{E}_p}$. Par ailleurs on a clairement $\forall\, v \in \mathbb{Z}_\mathrm{p}$ $\big|\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v)\big| \le p^\ell\, \|\tilde{\mu}\|_\star$.

4.3. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on a $\boxed{\big\|\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})\big\|_1 \le \|\tilde{\mu}\|_\star}$.

Dém : $\big\|\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})\big\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \big|\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v)\big|\, \delta(v) \le p^\ell \int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)\, |\tilde{\mu}|(x)\Big]\, \delta(v)$;

or $\forall\, v, x \in \mathbb{Z}_\mathrm{p}\quad \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x) = \mathbb{1}_{\mathrm{B}(x,\ell)}(v)$, donc

$$\big\|\mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})\big\|_1 = p^\ell \int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(x,\ell)}(v)\, \delta(v)\Big]\, |\tilde{\mu}|(x) = \int_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} |\tilde{\mu}|(x) = \|\tilde{\mu}\|_\star\,.$$

4.4. Théorème : $\forall\, f \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell(f) \xrightarrow{\mathrm{u}} f$ quand $\ell \to +\infty$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ on ait $\big|\, f(a + b\,p^m) - f(a) \big| \leq \varepsilon$; on peut alors écrire $\forall\, \ell \geq m \quad \forall\, v \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

$$\big|\, \mathrm{T}_\ell\,(f)\,(v) - f(v) \big| \leq \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} \big|\, f(v + p^\ell x) - f(v) \big|\, \delta x \leq \varepsilon\,,$$

c-à-d $\forall\, \ell \geq m \quad \big\|\, \mathrm{T}_\ell\,(f)\,(v) - f(v) \big\| \leq \varepsilon$.

4.5. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \widehat{\mathcal{L}^1_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell\,(\tilde f) \overset{1}{\to} \tilde f$ quand $\ell \to +\infty$.

Dém : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\mathrm{T}_\ell - \mathrm{I} : \widehat{\mathcal{L}^1_p} \to \widehat{\mathcal{L}^1_p}$.

4.6. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \widehat{\mathcal{L}^2_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell\,(\tilde f) \overset{2}{\to} \tilde f$ quand $\ell \to +\infty$.

Dém : Analogue à la précédente.

4.7. Définition : Soient $\tilde\mu_n\,,\, \tilde\mu \in \mathcal{M}_p$; on dit que la suite $\tilde\mu_n$ converge faiblement vers $\tilde\mu$ ssi $\forall\, h \in \mathcal{C}_p \quad \tilde\mu_n(h) \to \tilde\mu(h)$. On écrit $\tilde\mu_n \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde\mu$.

4.8. Théorème : $\forall\, \tilde\mu \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on a $\mathrm{T}_\ell\,(\tilde\mu) \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde\mu$ quand $\ell \to +\infty$.

Dém : Il faut montrer que $\forall\, h \in \mathcal{C}_p \quad \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} h(v)\, \mathrm{T}_\ell\,(\tilde\mu)\,(v)\, \delta\,(v) \to \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} h(x)\, \tilde\mu\,(x)$ quand $\ell \to +\infty$.

On a $\displaystyle\int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} h(v)\, \mathrm{T}_\ell\,(\tilde\mu)\,(v)\, \delta\,(v) = \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} h(v)\, p^\ell \Big[\int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v\,,\,\ell)}\,(x)\, \tilde\mu\,(x) \Big]\, \delta\,(v)$

$$= p^\ell \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(x\,,\,\ell)}\,(v)\, h(v)\, \delta\,(v) \Big]\, \tilde\mu\,(x) = \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} \mathrm{T}_\ell\,(h)\,(x)\, \tilde\mu\,(x)\ ;$$

comme $\mathrm{T}_\ell\,(h) \overset{\mathbf{u}}{\to} h$, on en déduit $\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} \mathrm{T}_\ell\,(h)\,(x)\, \tilde\mu\,(x) = \int_{\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}} h(x)\, \tilde\mu\,(x)$.

CHAPITRE XXI

SERIES DE FOURIER SUR $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

Nous développons la théorie des séries de Fourier des mesures complexes sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$. Ces séries sont des combinaisons linéaires infinies à coefficients complexes de la fonction $\mathbb{1}$ et des fonctions de la forme $e^{2\pi i m x/p^n}$ $\big(m\,,\,n\in\mathbb{N}^*\,,\ p\nmid m\,\leq\,p^n-1\big)$, qui constituent les *caractères* de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$.

Nous proposons ensuite des exemples explicites de calcul de séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$.

§ 1. Caractères de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

Notations : $\mathbb{K}_{\mathrm{p}}$ = complété p-adique de $\mathbb{Q}$ = corps des fractions de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

$\mathbf{U}=\big\{z\in\mathbb{C}\ \|\ |z|=1\big\}$.

1.1. Théorème : La fonction $\boxed{E\ :\ \mathbb{K}_{\mathrm{p}}\to\mathbf{U}\ :\ x\ \mapsto\ e^{2\pi i x}}$ est bien définie.

Dém : Comme $\mathbb{K}_{\mathrm{p}}/\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et que la fonction $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to\mathbf{U}\ :\ x\ \mapsto\ e^{2\pi i x}$ est bien définie, il en est de même de la fonction E.

1.2.* Théorème : $E\in\widehat{\mathcal{C}_p}$; de plus $\forall\,x\in\mathbb{K}_{\mathrm{p}}$ $\big[\,E\,(x)=0\ \Leftrightarrow\ x\in\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}\,\big]$.

1.3. Définition : Une fonction $F\ :\ \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}\to\mathbf{U}$ est un caractère de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ ssi $F\in\widehat{\mathcal{C}_p}$ et ssi $\forall\,x\,,\,y\in\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ $F\,(x+y)=F\,(x)\,F\,(y)$.
La fonction constante $E_0\ :\ \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}\to\mathbf{U}\ :\ x\ \mapsto\ 1$ est clairement un caractère de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$.

1.4.* Théorème : $\forall\,m\,,\,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $\boxed{p\nmid m\,\leq\,p^n-1}$ la fonction

$\boxed{E_{\,m\,,n}\ :\ \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}\to\mathbf{U}\ :\ x\ \mapsto\ E\,(m\,x/p^n)=\ e^{2\pi i m x/p^n}}$ est un caractère de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$.

1.5.* Théorème : $E_{\,m\,,n}=\ E_{\,m',n'}\ \Leftrightarrow\ \big[\,m=m'\ \ \text{et}\ \ n=n'\,\big]$.

Remarque : Nous verrons plus loin que E_0 et les $E_{\,m\,,n}$ sont en fait les seuls caractères de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$, mais nous ne ferons pas usage de ce résultat pour l'instant.

1.6.* Théorème : Les caractères de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ forment un groupe multiplicatif $\mathcal{G}_p$.

Notation : $\forall\,z\in\mathbb{C}$ nous notons $z^{\#}$ le conjugué de z.

1.7.* Théorème : $\forall\, F \in \mathcal{G}_p \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ on a $F(-x) = F(x)^{\#} = 1/F(x)$.

1.8.* Théorème : $\forall\, x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \quad E_{m,n}(-x) = E_{m,n}(x)^{\#} = E_{p^n-m,n}(x)$.

1.9. Lemme : Si deux caractères de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ sont proportionnels ils sont égaux.

Dém : Soient F et G deux caractères de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ et soit $c \in \mathbf{U}$ tel que $G = c\,F$; on a $c^2\,F(1)^2 = G(1)^2 = G(2) = c\,F(2) = c\,F(1)^2$, donc $c^2 = c$, donc $c = 1$.

1.10. Théorème :

Si F et G sont deux caractères distincts de $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ on a $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x = 0$.

Dém : On a $\forall\, y \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \quad \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x = \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} F(x+y)\,G(x+y)^{\#}\,\delta x$

$= F(y)\,G(y)^{\#}\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x$; puisque $\mathrm{F} \neq \mathrm{G}$, il existe au moins un $y \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ tel que $\mathrm{F}(y)\,\mathrm{G}(y)^{\#} = \mathrm{F}(y)/\mathrm{G}(y) \neq 1$; donc $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} F(x)\,G(x)^{\#}\,\delta x = 0$.

1.11. Corollaire :

$\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \nmid m \leq p^n - 1$ on a $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} e^{\pm 2\pi i m x/p^n}\,\delta x = 0}$.

§ 2. Séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

2.1. Définition : Soit $\tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$; on pose $\boxed{c_0 = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \tilde{\mu}(x)} \in \mathbb{C}$

et $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\boxed{p \nmid m \leq p^n - 1}$ $\boxed{c_{m,n} = \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} e^{-2\pi i m x/p^n}\,\tilde{\mu}(x)} \in \mathbb{C}$.

Ce sont les coefficients de Fourier de $\tilde{\mu}$.

2.2.* Théorème : $|c_0| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$ et $|c_{m,n}| \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$.

2.3. <u>Définition</u> :

La série $c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\sum\limits_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n}\, e^{2\pi i m x/p^n} \Big)$ est <u>la série de Fourier</u> de $\tilde{\mu}$.

On pose $\forall\, \ell \in \mathbb{N} \quad \forall\, v \in \mathbb{Z}_p \quad \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\ell} \Big(\sum\limits_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n}\, e^{2\pi i m v/p^n} \Big)$;

$\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu}) \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ est la <u>somme partielle</u> d'ordre ℓ de la série de Fourier de $\tilde{\mu}$.

2.4. <u>Théorème</u> : $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu}) = \mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, v \in \mathbb{Z}_p \quad \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\ell} \Big(\sum\limits_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n}\, e^{2\pi i m v/p^n} \Big)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mu}(x) + \sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^n}\, \tilde{\mu}(x) \Big] e^{2\pi i m v/p^n} \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mu}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^n} \Big) \Big] \tilde{\mu}(x)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\sum_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} \Big] \tilde{\mu}(x).$$

Si $x \in \mathrm{B}(v, \ell)$, c-à-d si $(x-v)/p^\ell \in \mathbb{Z}_p$, on a $\sum\limits_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} = p^\ell$;

si $x \notin \mathrm{B}(v, \ell)$, c-à-d si $(x-v)/p^\ell \notin \mathbb{Z}_p$, on a

$$\sum_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} = \frac{e^{2\pi i m (v-x)} - 1}{e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} - 1} = 0 \ ;$$

donc $\sum\limits_{m=0}^{p^\ell-1} e^{2\pi i m (v-x)/p^\ell} = p^\ell\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)$, donc

$$\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v) = p^\ell \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(x)\, \tilde{\mu}(x) = \mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v).$$

On en déduit le corollaire suivant :

2.5.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, f \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on a $\mathrm{S}_\ell(f) \xrightarrow{\mathbf{u}} f$ quand $\ell \to +\infty$.

$\forall\, \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}^1_p}$ on a $\mathrm{S}_\ell(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \tilde{f}$ quand $\ell \to +\infty$.

$\forall\, \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}^2_p}$ on a $\mathrm{S}_\ell(\tilde{f}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$ quand $\ell \to +\infty$.

Remarquons que, contrairement aux séries de Fourier classiques sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, les résultats obtenus sont les plus favorables possible.

2.6. Relation de Parseval : $\forall\, \tilde{f} \in \widehat{\mathcal{L}^2_p}$ on a

$$\boxed{|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} |c_{m,n}|^2 \Big) = \int_{\mathbf{Z}_p} |\tilde{f}|^2 (x)\, \delta x}$$

Dém :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \tilde{f}(x)^{\#}\, \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(x)\, \delta x = c_0 \int_{\mathbf{Z}_p} f(x)^{\#}\, \delta x + \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n} \Big[\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)^{\#}\, e^{2\pi i m x/p^n}\, \delta x \Big]$$

$$= |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\ell} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} |c_{m,n}|^2 \Big) ;$$

de plus $\mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$, donc $\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} \int_{\mathbf{Z}_p} \tilde{f}(x)^{\#}\, \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(x)\, \delta x = \int_{\mathbf{Z}_p} |\tilde{f}|^2(x)\, \delta x$.

2.7. Corollaire : Les seuls caractères de $\mathbb{Z}_p$ sont la fonction E_0 et les fonctions $E_{m,n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \nmid m \le p^n - 1$.

Dém : Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{G}_p$ distinct des caractères énoncés ci-dessus ; on a $\mathrm{F} \in \widehat{\mathcal{C}_p} \subset \widehat{\mathcal{L}^2_p}$; or tous les coefficients de Fourier de F sont nuls car F est orthogonal à tous les autres caractères de $\mathbb{Z}_p$; on en déduit $\displaystyle\int_{\mathbf{Z}_p} |\mathrm{F}|^2(x)\, \delta x = 0$, donc $\mathrm{F} = 0$.

2.8. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ $\forall\, h \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on a

$$\boxed{c_0 \int_{\mathbf{Z}_p} h(v)\, \delta(v) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n} \int_{\mathbf{Z}_p} h(v)\, e^{2\pi i m v/p^n}\, \delta(v) \Big] = \int_{\mathbf{Z}_p} h(x)\, \tilde{\mu}(x)}$$

Dém : On a $\forall\, \ell \in \mathbb{N}^*$

$$c_0 \int_{\mathbf{Z}_p} h(v)\, \delta(x) + \sum_{n=1}^{\ell} \Big[\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} c_{m,n} \int_{\mathbf{Z}_p} h(v)\, e^{2\pi i m v/p^n}\, \delta(v) \Big] = \int_{\mathbf{Z}_p} h(v)\, \mathrm{S}_\ell(\tilde{\mu})(v)\, \delta(v)$$

$$= \int_{\mathbf{Z}_p} h(v)\, \mathrm{T}_\ell(\tilde{\mu})(v)\, \delta(v) \to \int_{\mathbf{Z}_p} h(x)\, \tilde{\mu}(x) \quad \text{quand} \quad \ell \to +\infty .$$

2.9. Corollaire :

Soit $\tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ tel que tous ses coefficients de Fourier sont nuls ; alors $\tilde{\mu} = 0$.

Dém : Si tous les coefficients de Fourier de $\tilde{\mu}$ sont nuls, alors $\forall\, h \in \mathcal{E}_p$ $\displaystyle\int_{\mathbf{Z}_p} h(x)\, \tilde{\mu}(x) = 0$; donc par définition $\tilde{\mu} = 0$.

§ 3. Exemples de séries de Fourier sur $\mathbb{Z}_p$

Exemple 1• $\quad f_s \,:\, \mathbb{Z}_p \to [0,1] \,:\, x \mapsto |x|_p^s$ avec $s \in \mathbb{R}_\star^+$.

Calcul de c_0 :

$$c_0 = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \; \delta(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{p^r \mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \; \delta(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \int_{p^r \mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} \delta(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left(\frac{1}{p^r} - \frac{1}{p^{r+1}} \right) = \frac{p-1}{p} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{r(s+1)}} = \frac{(p-1)\,p^s}{p^{s+1}-1}.$$

Calcul de $c_{m,n}$:

$$c_{m,n} = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \; e^{-2\pi i m x/p^n} \, \delta(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{p^r \mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \; e^{-2\pi i m x/p^n} \, \delta(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \int_{p^r \mathbb{Z}_p - p^{r+1}\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^n} \, \delta(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left[\frac{1}{p^r} \int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r}} \, \delta(x) - \frac{1}{p^{r+1}} \int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r-1}} \, \delta(x) \right]$$

$$= \sum_{r=n-1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left[\frac{1}{p^r} \int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r}} \, \delta(x) - \frac{1}{p^{r+1}} \int_{\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i m x/p^{n-r-1}} \, \delta(x) \right]$$

$$= -\frac{1}{p^{(n-1)s}} \frac{1}{p^n} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \left(\frac{1}{p^r} - \frac{1}{p^{r+1}} \right) = -\frac{1}{p^{n(s+1)-s}} + \frac{p-1}{p} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{p^{r(s+1)}}$$

$$= -\frac{1}{p^{n(s+1)}} \left[p^s - \frac{p-1}{p} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{r(s+1)}} \right] = -\frac{1}{p^{n(s+1)}} \left[p^s - \frac{p-1}{p} \frac{p^{s+1}}{p^{s+1}-1} \right]$$

$$= -\frac{p^s}{p^{n(s+1)}} \left[1 - \frac{p-1}{p^{s+1}-1} \right] = -\frac{p^s}{p^{n(s+1)}} \frac{p^{s+1}-p}{p^{s+1}-1} = -\frac{1}{p^{(n-1)(s+1)}} \frac{p^s-1}{p^{s+1}-1}.$$

Comme $f_s \in \mathcal{C}_p$ on peut écrire $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$

$$\boxed{|x|_p^s = \frac{(p-1)\,p^s}{p^{s+1}-1} - \frac{p^s-1}{p^{s+1}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{(n-1)(s+1)}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m x/p^n}}$$

Puisque f_s est une fonction réelle on en déduit :

$$(p^{s+1}-1)\,|x|_p^s = (p-1)\,p^s - (p^s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{(n-1)(s+1)}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \cos(2\pi m x/p^n) \;;$$

en particulier pour $s=1$ on obtient :

$$\boxed{(p+1)\,|x|_p \;=\; p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\,(n-1)}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right)}$$

Par ailleurs on a $\forall\, n \geq 2$

$$\sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right) \;=\; \sum_{m=1}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right) \;-\; \sum_{m=1}^{p^{n-1}-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^{n-1}\right).$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{|x|_p \;=\; \frac{p}{p+1} \;-\; (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\,n}} \sum_{m=1}^{p^n-1} \cos\left(2\,\pi\,m\,x/p^n\right)}$$

Remarquons que ces séries n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls ; les termes d'indice $n > k+1$ sont nuls quand $|x|_p = \dfrac{1}{p^k}$.

<u>Exemple 2</u>$^{\bullet}$

On définit la fonction $\sigma \;:\; \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \to [\,0\,,1\,]$ de la manière suivante :

si $\underline{\ldots\, d_k\; d_{k-1}\, \ldots\, d_2\; d_1}$ est le développement p-adique de $x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$, on pose

$\sigma\,(x) \,=\, 0\,,\underline{d_1\; d_2\, \ldots\, d_{k-1}\, d_k\, \ldots}$ que l'on considère comme le développement p-adique d'un nombre <u>réel</u> $\in [\,0\,,1\,]$; autrement dit si $x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, p^{k-1} \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$, avec $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $d_k \in [\![\,0\,,\,p-1\,]\!]$, on pose $\sigma\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\,/\,p^k \in [\,0\,,1\,]$.

<u>Calcul de c_0</u> :

$$c_0 \;=\; \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \sigma\,(x)\;\delta\,(x) \;=\; \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^{\ell}} \sum_{r=0}^{p^{\ell}-1} \sigma\,(r)\ ;\ \text{on a}\quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{r=0}^{p^{\ell}-1} \sigma\,(r) \;=\; \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \cdots \sum_{d_{\ell}=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_{\ell}}{p^{\ell}}\right)$$

$$= \frac{1}{p^{\ell}} \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \cdots \sum_{c_{\ell}=0}^{p-1} \left(d_{\ell} + d_{\ell-1}\, p + \ldots + d_2\, p^{\ell-2} + d_1\, p^{\ell-1}\right)$$

$$= \frac{1}{p^{\ell}} \sum_{r=0}^{p^{\ell}-1} r \;=\; \frac{p^{\ell}-1}{2}\ ;\ \text{donc}\quad c_0 \;=\; \lim_{\ell \to +\infty} \frac{p^{\ell}-1}{2\,p^{\ell}} \;=\; \frac{1}{2}.$$

<u>Lemme</u> : $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{p \nmid m}$ on a 1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} e^{\,2\,\pi\,i\,m\,k/p} \,=\, 0$

$$2)\quad \sum_{k=0}^{p-1} k\, e^{2\pi i m k/p} = \frac{p}{e^{2\pi i m/p}-1}.$$

Dém : On a $\forall\, u \in \mathbb{C}^*$ $\sum\limits_{k=0}^{p-1} e^{k u} = \dfrac{e^{p u}-1}{e^{u}-1}$; en dérivant par rapport à u

on trouve $\sum\limits_{k=0}^{p-1} k\, e^{k u} = \dfrac{p\, e^{p u}}{e^{u}-1} - e^{u}\, \dfrac{e^{p u}-1}{(e^{u}-1)^2}$; en posant $u = 2\pi i m/p$

on obtient les deux résultats.

Calcul de $c_{m,n}$:

Nous calculons $c_{m,3}$, le cas général s'en déduisant aisément.

$$c_{m,3} = \int_{\mathbf{Z}_p} \sigma(x)\, e^{-2\pi i m x/p^3}\, \delta(x) = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^{\ell}} \sum_{r=0}^{p^{\ell}-1} \sigma(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3} ;$$

on a $\forall\, \ell \geq 4$ $\sum\limits_{r=0}^{p^{\ell}-1} \sigma(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3}$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \frac{d_3}{p^3} + \dots + \frac{d_\ell}{p^\ell} \right)$$
$$\times \exp\left\{-2\pi i\, \frac{m}{p^3} \left(d_1 + d_2\, p + \dots + d_\ell\, p^{\ell-1}\right)\right\}$$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \frac{d_3}{p^3} + \dots + \frac{c_\ell}{p^\ell} \right) \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\}$$
$$\times \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_3}{p}\} \dots \exp\{-2\pi i\, m\, d_n\, p^{\ell-4}\}$$

$$= \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \frac{d_3}{p^3} + \dots + \frac{d_\ell}{p^\ell} \right)$$
$$\times \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_3}{p}\} ;$$

or $\sum\limits_{d_3=0}^{p-1} \exp\{-2\pi i\, m\, \dfrac{d_3}{p}\} = 0$, donc l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=1}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \dots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \frac{d_3}{p^3} \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_3}{p}\}$$

$$= p^{\ell-6} \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} d_3\, \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\}\ \exp\{-2\pi i\, m\, \frac{d_3}{p}\} ;$$

donc $c_{m,3} = \dfrac{1}{p^6}\, \dfrac{e^{-2\pi i m/p^2}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}\, \dfrac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^2}-1}\, \dfrac{p}{e^{-2\pi i m/p}-1} = \dfrac{1}{p^5}\, \dfrac{1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}$

En généralisant on trouve donc $\boxed{c_{m,n} = \dfrac{1}{p^{2n-1}}\, \dfrac{1}{e^{-2\pi i m/p^n}-1}}$;

or $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \dfrac{1}{e^{-i\alpha} - 1} \;=\; -\,\dfrac{1}{2} \;+\; \dfrac{i}{2}\,\cot\left(\dfrac{\alpha}{2}\right),$

donc $\quad c_{m,n} \;=\; \dfrac{1}{2\,p^{2n-1}}\left[-1 + i\,\cot\left(\dfrac{\pi\,m}{p^n}\right)\right].$

Comme $\sigma \in \mathcal{C}_p$ on peut écrire $\forall\, x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

$$\boxed{2\,\sigma(x) \;=\; 1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \left[-1 + i\,\cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\right] e^{2\pi i m x/p^n}}$$

Puisque σ est une fonction réelle on en déduit :

$$2\,\sigma(x) \;=\; 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \left[\cos\left(2\pi\,m\,x/p^n\right) + \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\sin\left(2\pi\,m\,x/p^n\right)\right].$$

Par ailleurs on sait que

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \cos\left(2\pi\,m\,x/p^n\right) \;=\; \frac{p+1}{p}\;|x|_p \;;$$

on obtient donc

$$\boxed{2\,\sigma(x) \;=\; \frac{p+1}{p}\;|x|_p \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\sin\left(2\pi\,m\,x/p^n\right)},$$

ce qui montre d'ailleurs que $\dfrac{p+1}{2\,p}\;|x|_p$ est la partie paire de $\sigma(x)$.

Par ailleurs on a $\forall\, n \geq 2 \quad \displaystyle\sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\sin\left(2\pi\,m\,x/p^n\right)$

$$= \sum_{m=1}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\sin\left(2\pi\,m\,x/p^n\right) \;-\; \sum_{m=1}^{p^{n-1}-1} \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^{n-1}}\right)\sin\left(2\pi\,m\,x/p^{n-1}\right).$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{2\;\frac{p}{p+1}\;\sigma(x) \;=\; |x|_p \;-\; (p-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} \sum_{m=1}^{p^n-1} \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\sin\left(2\pi\,m\,x/p^n\right)}.$$

Exemple $3^\bullet$: généralisation de l'exemple $2^\bullet$

On définit la fonction $\tau \;:\; \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \to \mathbb{C}$ de la manière suivante :

si $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\, p^{k-1}$ avec $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\;c_k \in [[\,0\,,\,p-1\,]]$, on pose $\tau\,(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\, \lambda^{k-1}$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| < 1$.

Calcul de c_0 :

$$c_0 \;=\; \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \tau\,(x)\;\delta\,(x) \;=\; \lim_{\ell \to +\infty}\; \frac{1}{p^\ell}\; \sum_{r=0}^{p^\ell - 1} \tau\,(r)\;;\text{ on a }\; \forall\,\ell \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} \tau\,(r) \;=\; \sum_{d_1=0}^{p-1}\,\sum_{d_2=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 \,+\, d_2\,\lambda \,+\, \ldots \,+\, d_\ell\,\lambda^{\ell-1} \Big)$$

$$=\; \frac{1}{2}\; p^\ell\,(p-1)\; \frac{1-\lambda^\ell}{1-\lambda}\;;\text{ donc }\; c_0 \;=\; \lim_{n \to +\infty}\; \frac{1}{2}\;(p-1)\; \frac{1-\lambda^\ell}{1-\lambda} \;=\; \frac{1}{2}\;\frac{p-1}{1-\lambda}\,.$$

Calcul de $c_{m\,,\,n}$:

Nous calculons $c_{m\,,\,3}$, le cas général s'en déduisant aisément.

$$c_{m\,,\,3} \;=\; \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \tau\,(x)\; e^{-\,2\,\pi\,i\,m\,x/p^3}\;\delta\,(x) \;=\; \lim_{\ell \to +\infty}\; \frac{1}{p^\ell}\; \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \tau\,(r)\; e^{-\,2\,\pi\,i\,m\,r/p^3}\,;$$

on a $\forall\,\ell \ge 4$ $\quad \sum\limits_{r=0}^{p^\ell-1} \tau\,(r)\; e^{-\,2\,\pi\,i\,m\,r/p^3}$

$$=\; \sum_{d_1=0}^{p-1}\,\sum_{d_2=0}^{p-1}\,\sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 \,+\, d_2\,\lambda \,+\, d_3\,\lambda^2 \,+\, \ldots \,+\, d_\ell\,\lambda^{\ell-1} \Big)$$

$$\times\; \exp\,\Big\{ -\,2\,\pi\,i\; \frac{m}{p^3}\; \big(d_1 + d_2\,p + \ldots + d_\ell\,p^{\ell-1} \big) \Big\}$$

$$=\; \sum_{d_1=0}^{p-1}\,\sum_{d_2=0}^{p-1}\,\sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 \,+\, d_2\,\lambda \,+\, d_3\,\lambda^2 \,+\, \ldots \,+\, d_\ell\,\lambda^{\ell-1} \Big)\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_1}{p^3} \}$$

$$\times\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_2}{p^2} \}\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_3}{p} \}\; \ldots\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; d_\ell\; p^{\,\ell-4} \}$$

$$=\; \sum_{d_1=0}^{p-1}\,\sum_{d_2=0}^{p-1}\,\sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big(d_1 \,+\, d_2\,\lambda \,+\, d_3\,\lambda^2 \,+\, \ldots \,+\, d_\ell\,\lambda^{\ell-1} \Big)$$

$$\times\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_1}{p^3} \}\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_2}{p^2} \}\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_3}{p} \}\;;$$

or $\sum\limits_{c_2=0}^{p-1} \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \dfrac{c_2}{p} \} \;=\; 0$, donc l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\sum_{d_1=0}^{p-1}\,\sum_{d_2=0}^{p-1}\,\sum_{d_3=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} d_3\,\lambda^2\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_1}{p^3} \}\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_2}{p^2} \}\; \exp\,\{ -\,2\,\pi\,i\,m\; \frac{d_3}{p} \}$$

$$= \ p^{\ell - 3}\, \lambda^2 \sum_{d_1 = 0}^{p-1} \sum_{d_2 = 0}^{p-1} \sum_{d_3 = 0}^{p-1} d_3 \ \exp\{-2\,\pi\, i\, m\, \frac{d_1}{p^3}\} \ \exp\{-2\,\pi\, i\, m\, \frac{d_2}{p^2}\} \ \exp\{-2\,\pi\, i\, m\, \frac{d_3}{p}\}$$

donc finalement

$$c_{m\,,3} \ = \ \frac{\lambda^2}{p^3}\ \frac{e^{-2\,\pi\, i\, m/p^2} - 1}{e^{-2\,\pi\, i\, m/p^3} - 1}\ \frac{e^{-2\,\pi\, i\, m/p} - 1}{e^{-2\,\pi\, i\, m/p^2} - 1}\ \frac{p}{e^{-2\,\pi\, i\, m/p} - 1} \ = \ \frac{\lambda^2}{p^2}\ \frac{1}{e^{-2\,\pi\, i\, m/p^3} - 1}\,.$$

En généralisant on trouve donc $\boxed{c_{m\,,n} \ = \ \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \frac{1}{e^{-2\,\pi\, i\, m/p^n} - 1}}$,

c-à-d $\quad c_{m\,,n} \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1}\left[-1 + i\, \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\right].$

Comme $\tau \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on peut écrire $\forall\, x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

$$\boxed{2\,\tau(x) \ = \ \frac{p-1}{1-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n - 1}\left[-1 + i\, \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\right] e^{2\,\pi\, i\, m\, x/p^n}}$$

On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{d_n(x) \ = \ n^{\text{ième}} \text{ chiffre dans le développement p-adique de } x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}}$.

En identifiant les coefficients des puissances de λ on obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{2\ d_n(x) \ = \ p - 1 \ + \ \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n - 1}\left[-1 + i\, \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\right] e^{2\,\pi\, i\, m\, x/p^n}} \ ,$$

ou encore

$$\boxed{2\ d_n(x) \ = \ p - 1 \ - \ \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{\substack{m=1 \\ p\,\nmid\, m}}^{p^n - 1}\left[\cos\left(2\,\pi\, m\, x/p^n\right) + \ \cot\left(\frac{m\,\pi}{p^n}\right)\, \sin\left(2\,\pi\, m\, x/p^n\right)\right]}$$

Relation de Parseval :

Calculons $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} d_n(x)^2\ \delta(x) \ = \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell - 1} d_n(r)^2$; on a $\forall\, \ell \geq n$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell - 1} d_n(r)^2 \ = \ \sum_{d_1 = 0}^{p-1} \sum_{d_2 = 0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell = 0}^{p-1} d_n^2 \ = \ \frac{1}{6}\ p^\ell\,(p-1)\,(2\,p-1)\ ;$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} d_n(x)^2\ \delta(x) \ = \ \frac{1}{6}\ (p-1)\,(2\,p-1).$

En appliquant la formule de Parseval à la série de Fourier de $d_n(x)$ on trouve donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2}{3}\,(p-1)\,(2\,p-1) \;=\; (p-1)^2 + \frac{1}{p^{2\,(n-1)}} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)}\,,$$

c-à-d $\displaystyle\sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^2-1)\,p^{2\,(n-1)}$, donc

$$\sum_{m=1}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p}\right)} + \sum_{r=2}^{n}\Big[\sum_{m=1}^{p^r-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^r}\right)} - \sum_{m=1}^{p^{r-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^{r-1}}\right)}\Big]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ p \nmid m}}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^2-1) \sum_{r=1}^{n} p^{2\,(r-1)} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^2-1)\,\frac{p^{2\,n}-1}{p^2-1} \;=\; \frac{1}{3}\,(p^{2\,n}-1)\,,$$

c-à-d

$$\boxed{\sum_{m=1}^{p^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{p^n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,\left(p^{2\,n}-1\right)}\,,$$

qui est un cas particulier de la formule $(n \geq 2)$

$$\boxed{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{m\,\pi}{n}\right)} \;=\; \frac{1}{3}\,\left(n^2-1\right)}\,.$$

Exemple $4^\bullet$:

On définit la fonction $\varphi \;:\; \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \to \mathbb{C}$ de la manière suivante :

si $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\, p^{k-1}$ avec $\forall\, k \in \mathbb{N}\;\; c_k \in [[\,0\,,\,p-1\,]]$, on pose

$\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} \exp\{2\,\pi\,i\,w\,\dfrac{d_k}{p}\}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ et $w \in [[\,1\,,\,p-1\,]]$.

Calcul de c_0 :

$c_0 \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \varphi(x)\;\delta(x) \;=\; \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r)$; on a $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r) \;=\; \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \ldots \sum_{d_\ell=0}^{p-1} \Big[\exp\{2\,\pi\,i\,w\,\frac{d_1}{p}\} + \lambda\,\exp\{2\,\pi\,i\,w\,\frac{d_2}{p}\}$$

$$+ \ldots + \lambda^{\ell-1} \exp\{2\,\pi\,i\,w\,\frac{d_\ell}{p}\}\Big] \;=\; 0\,;\;\text{ donc }\;\; c_0 = 0\,.$$

Calcul de $c_{m\,,\,n}$:

Nous calculons $c_{m\,,\,3}$, le cas général s'en déduisant aisément.

$$c_{m,3} = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)\, e^{-2\pi i m x/p^3}\, \delta(x) = \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3} ;$$

en raisonnant comme à l'exemple $3^\bullet$ on trouve $\forall\, \ell \geq 4$

$$\sum_{r=0}^{p^\ell-1} \varphi(r)\, e^{-2\pi i m r/p^3} = p^{\ell-3}\, \lambda^2 \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\{2\pi i w \frac{d_3}{p}\}$$

$$\times \exp\{-2\pi i m \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_2}{p^2}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_3}{p}\}$$

$$= p^{\ell-3}\, \lambda^2 \sum_{d_1=0}^{p-1} \sum_{d_2=0}^{p-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\{-2\pi i m \frac{d_1}{p^3}\} \exp\{-2\pi i m \frac{d_2}{p^2}\}$$

$$\times \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

$$= p^{\ell-3}\, \lambda^2\, \frac{e^{-2\pi i m/p^2}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1}\, \frac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^2}-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

$$= p^{\ell-3}\, \lambda^2\, \frac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1} \sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$$

donc $c_{m,3} = \dfrac{\lambda^2}{p^3}\, \dfrac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1} \displaystyle\sum_{d_3=0}^{p-1} \exp\left\{2\pi i\,(w-m)\, \frac{d_3}{p}\right\}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{p^2}\, \dfrac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^3}-1} & \text{ssi} \quad m \equiv w \pmod p \\ 0 \quad \text{ssi} \quad m \not\equiv w \pmod p\,. \end{cases}$$

En généralisant on trouve $c_{m,n} = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \dfrac{e^{-2\pi i m/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^n}-1} & \text{ssi} \quad m \equiv w \pmod p \\ 0 \quad \text{ssi} \quad m \not\equiv w \pmod p\,, \end{cases}$

c-à-d $c_{m,n} = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \dfrac{e^{-2\pi i w/p}-1}{e^{-2\pi i m/p^n}-1} & \text{ssi} \quad m \equiv w \pmod p \\ 0 \quad \text{ssi} \quad m \not\equiv w \pmod p\,. \end{cases}$

Comme $\varphi \in \widehat{\mathcal{C}_p}$ on peut écrire $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$

$$\boxed{\left[-1 + i \cot\left(\frac{w\pi}{p}\right)\right] \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv w \pmod p}}^{p^n-1} \left[-1 + i \cot\left(\frac{m\pi}{p^n}\right)\right] e^{2\pi i m x/p^n}}$$

$$\boxed{\left[-1 + i \cot\left(\frac{w\pi}{p}\right)\right] \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{n-1} \sum_{r=0}^{p^{n-1}-1} \left[-1 + i \cot\left(\frac{w+rp}{p^n}\,\pi\right)\right] e^{2\pi i (w+rp) x/p^n}}$$

.

En identifiant les coefficients des puissances de λ on obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Big[-1+\, i\, \cot\Big(\frac{w\,\pi}{p}\Big)\Big]\ \exp\Big\{2\,\pi\, i\, w\ \frac{d_n\,(x)}{p}\Big\}\\ &\quad = \frac{1}{p^{\,n-1}}\ \exp\Big\{2\,\pi\, i\, w\ \frac{x}{p^n}\Big\}\sum_{r\,=\,0}^{p^{\,n-1}-1}\Big[-1+\, i\, \cot\Big(\frac{w+r\,p}{p^n}\ \pi\Big)\Big]\ e^{\,2\,\pi\, i\, r\, x/p^{\,n-1}}\end{aligned}}$$

<u>Relation de Parseval</u> :

On a $\displaystyle \int_{\mathbf{Z}_p}\Big|\exp\Big\{2\,\pi\, i\, w\ \frac{d_n\,(x)}{p}\Big\}\Big|^2\ \delta\,(x)\ =\int_{\mathbf{Z}_p}\delta\,(x)\ =\ 1\ ,$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{r\,=\,0}^{p^n-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\dfrac{w+r\,p}{p^{\,n+1}}\ \pi\Big)}\ =\ \frac{p^{\,2\,n}}{\sin^2\Big(\dfrac{w\,\pi}{p}\Big)}}$$

CHAPITRE XXII

CONVOLUTION SUR $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

Nous étudions la *convolution* de deux mesures réelles ou complexes sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$ avec les mêmes méthodes que sur $\mathbb{R}$. Nous présentons deux exemples explicites de calcul de convolution sur $\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$.

1.* Lemme :

Soit $h \in \mathcal{E}_p$; posons $H : \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}^2 \to \mathbb{R} : (r, s) \mapsto h(r+s)$; alors on a $H \in \mathcal{C}_p(\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}^2)$.

2. Définition : La convolée de $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p$ est définie par

$$\boxed{\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \ : \ \mathcal{E}_p \to \mathbb{R} \ : \ h \mapsto \iint_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}^2} h(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \tilde{\nu}(s)} \,.$$

3.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p$ on a $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}_p$ et $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_\star \leq \|\tilde{\mu}\|_\star \, \|\tilde{\nu}\|_\star$.

4. Théorème : $(\mathcal{M}_p, *)$ est une algèbre de Banach associative, commutative et unitaire.

Dém : Classique.

5. Théorème : $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_p$ on a $\boxed{\tilde{\mu} * \mathbb{1} = \tilde{\mu}(\mathbb{1})}$; en particulier $\mathbb{1} * \mathbb{1} = \mathbb{1}$.

Dém : $\forall h \in \mathcal{E}_p \quad (\tilde{\mu} * \mathbb{1})(h) = \iint_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}^2} h(r+s)\, \tilde{\mu}(r)\, \delta(s) = \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} h(r+s)\, \delta(s) \Big] \tilde{\mu}(r)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} h(s)\, \delta(s) \Big] \tilde{\mu}(r) \ = \ \tilde{\mu}(\mathbb{1}) \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} h(s)\, \delta(s) \,.$$

6. Théorème :

$\forall u, v \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}$ avec $\boxed{k \leq \ell}$ on a $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,k)} * \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)} = \frac{1}{p^\ell}\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u+v,k)}}$.

Dém : $\forall\, h \in \mathcal{E}_p \quad \displaystyle\iint_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}^2} h(r+s)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,k)}(r)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(r)\, \delta(s)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} h(r+s)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(u,k)}(r)\, \delta(r) \Big]\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(s)$$

$$= \frac{1}{p^k} \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} h(u + p^k r + s)\, \delta(r) \Big]\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(s)$$

$$= \frac{1}{p^k} \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} h(u + p^k r + s)\, \mathbb{1}_{\mathrm{B}(v,\ell)}(s)\, \delta(s) \Big]\, \delta(r)$$

$$= \frac{1}{p^{k+\ell}} \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h\,(u + p^k\,r + v + p^\ell\,s)\ \delta(s) \Big]\ \delta(r)$$

$$= \frac{1}{p^{k+\ell}} \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} h\,\big[\,u + v + p^k\,(r + p^{\ell-k}\,s)\,\big]\ \delta(r) \Big]\ \delta(s)$$

$$= \frac{1}{p^{k+\ell}} \int_{\mathbb{Z}_p} h\,(u + v + p^k\,r)\ \delta(r) \ = \ \frac{1}{p^\ell} \int_{\mathbb{Z}_p} h\,(r)\ \mathbb{1}_{\mathrm{B}\,(u+v\,,\,k)}\,(r)\ \delta(r)\,.$$

7.* <u>Corollaire</u> : $\mathcal{E}_p * \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_p$.

8. <u>Théorème</u> : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}_p \quad \forall\, u \in \mathbb{Z}_p$ on a $(f * g)\,(u) \,=\, \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} f\,(x)\,g\,(u-x)\ \delta x$; on en déduit $f * g \in \mathcal{C}_p$.

<u>Dém</u> : C'est une conséquence du théorème de Fubini.

9. <u>Lemme</u> : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}_p$ on a $(f * g)^2 \,\leq\, f^2 * g^2$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, u \in \mathbb{Z}_p$

$$(f * g)^2\,(u) \,=\, \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} f\,(x)\,g\,(u-x)\ \delta x \Big]^2 \leq \int_{\mathbb{Z}_p} f^2(x)\,g^2(u-x)\ \delta x \,=\, (f^2 * g^2)\,(u)\,.$$

10. <u>Théorème</u> : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}_p$ on a 1) $\|\,f * g\,\| \,\leq\, \|\,f\,\|\ \|g\|$

2) $\|\,f * g\,\|_1 \,\leq\, \|\,f\,\|_1\ \|g\|_1$

3) $\|\,f * g\,\|_2 \,\leq\, \|\,f\,\|_2\ \|g\|_2$

<u>Dém</u> : 1) Trivial 2) Conséquence du Théorème 3

3) $\|\,f * g\,\|_2^2 \,=\, \|\,(f * g)^2\,\|_1 \,\leq\, \|\,f^2 * g^2\,\|_1 \,\leq\, \|\,f^2\,\|_1\ \|g^2\|_1 \,=\, \|\,f\,\|_2\ \|g\|_2$.

11.* <u>Corollaire</u> : $\mathcal{C}_p * \mathcal{C}_p \subset \mathcal{C}_p$; $\mathcal{L}^1_p * \mathcal{L}^1_p \subset \mathcal{L}^1_p$; $\mathcal{L}^2_p * \mathcal{L}^2_p \subset \mathcal{L}^2_p$.

12. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}_p * \mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_p$ et $\forall\, \tilde{f}\ \tilde{g} \in \mathcal{B}_p \quad \|\,f * g\,\|_{\mathrm{B}} \,\leq\, \|\,f\,\|_{\mathrm{B}}\ \|g\|_{\mathrm{B}}$.

<u>Dém</u> : Soient $\tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{B}_p$ et soit $h \in \mathcal{E}_p$; on a

$$\big|\,(\tilde{f} * \tilde{g})\,(h)\,\big| \,\leq\, \iint_{\mathbb{Z}_p^2} |\,h\,(r+s)\,|\ \big|\,\tilde{f}\,\big|\,(r)\ |\,\tilde{g}\,|\,(s)\ \delta(r)\ \delta(s)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \Big[\int_{\mathbb{Z}_p} |\,h\,(r+s)\,|\ \big|\,\tilde{f}\,\big|\,(r)\ \delta(r) \Big]\ |\,\tilde{g}\,|\,(s)\ \delta(s) \ ;$$

or la fonction $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}\ :\ s \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} |\,h\,(r+s)\,|\ \big|\,\tilde{f}\,\big|\,(r)\ \delta(r)$ est continue, donc $\quad \left|(\tilde{f} * \tilde{g})(h)\right| \;\leq\; \|\tilde{g}\|_{\mathrm{B}} \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} |h(r+s)| \, \big|\tilde{f}\big|(r)\; \delta(r) \Big]\; \delta(s)$

$$= \; \|\tilde{g}\|_{\mathrm{B}} \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} |h(r+s)| \; \delta(s) \Big] \; \big|\tilde{f}\big|(r)\; \delta(r) \;;$$

de même la fonction $\quad \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} \to \mathbb{R} \;:\; r \mapsto \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} |h(r+s)| \; \delta(s) \quad$ est continue,

donc $\quad \left|(\tilde{f} * \tilde{g})(h)\right| \;\leq\; \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} \; \|\tilde{g}\|_{\mathrm{B}} \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \Big[\int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} |h(r+s)| \; \delta(s) \Big] \; \delta(r)$

$$= \; \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} \; \|\tilde{g}\|_{\mathrm{B}} \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} |h(s)| \; \delta(s) \;=\; \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} \; \|\tilde{g}\|_{\mathrm{B}} \; \|h\|_1 \;;$$

donc $\quad \tilde{f} * \tilde{g} \in \mathcal{B}_p \quad$ et $\quad \| f * g \|_{\mathrm{B}} \;\leq\; \| f \|_{\mathrm{B}} \; \| g \|_{\mathrm{B}}$.

Notation : $\forall\, \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}$ on note $\;c_0(\tilde{\mu})\;$ et $\;c_{m,n}(\tilde{\mu})\;$ les coefficients de Fourier de $\tilde{\mu}$.

13. Théorème :

$\forall\, \tilde{\mu}\,,\, \tilde{\nu} \in \widehat{\mathcal{M}_p}\quad$ on a $\quad c_0(\tilde{\mu} * \tilde{\nu}) \,=\, c_0(\tilde{\mu})\; c_0(\tilde{\nu}) \quad$ et $\quad c_{m,n}(\tilde{\mu} * \tilde{\nu}) \,=\, c_{m,n}(\tilde{\mu})\; c_{m,n}(\tilde{\nu})$.

Dém : $\; c_{m,n}(\tilde{\mu} * \tilde{\nu}) \;=\; \iint_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}^2} e^{-2\pi i m (r+s)/p^n}\; \tilde{\mu}(r)\; \tilde{\nu}(s)$

$$= \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} e^{-2\pi i m r/p^n}\; \tilde{\mu}(r) \int_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} e^{-2\pi i m s/p^n}\; \tilde{\nu}(s) \;=\; c_{m,n}(\tilde{\mu})\, c_{m,n}(\tilde{\nu}).$$

14. Calcul de $\;|x|_p^r * |x|_p^s\;$ $\quad (r\,,\, s \in \mathbb{R}^+)$.

A partir des séries de Fourier de $\;|x|_p^r\;$ et $\;|x|_p^s$, et en vertu du théorème précédent, on peut écrire $\;\forall\, x \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}}$

$$|x|_p^r * |x|_p^s \;=\; \frac{(p-1)^2\; p^{r+s}}{(p^{r+1}-1)\,(p^{s+1}-1)} + \frac{(p^r-1)\,(p^s-1)}{(p^{r+1}-1)\,(p^{s+1}-1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{(n-1)(r+s+2)}} \Bigg(\sum_{\substack{m=1 \\ p \,\nmid\, m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m x/p^n} \Bigg) \;;$$

or on a

$$|x|_p^{r+s+1} \;=\; \frac{(p-1)\; p^{r+s+1}}{p^{r+s+2}-1} - \frac{p^{r+s+1}-1}{p^{r+s+2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{(n-1)(r+s+2)}} \Bigg(\sum_{\substack{m=1 \\ p \,\nmid\, m}}^{p^n-1} e^{2\pi i m x/p^n} \Bigg) \;;$$

on en déduit

$$
\begin{aligned}
|x|_p^{\,r} * |x|_p^{\,s} \;=\; & \frac{(p-1)^2\, p^{\,r+s}}{(p^{\,r+1}-1)\,(p^{\,s+1}-1)} \\
& + \frac{(p^{\,r}-1)\,(p^{\,s}-1)}{(p^{\,r+1}-1)\,(p^{\,s+1}-1)}\; \frac{(p-1)\,p^{\,r+s+1}-(p^{\,r+s+2}-1)\,|x|_p^{\,r+s+1}}{p^{\,r+s+1}-1} \\
= \; & \frac{1}{p^{\,r+s+1}-1}\left[(p-1)\,p^{\,r+s} - \frac{(p^{\,r}-1)\,(p^{\,s}-1)}{(p^{\,r+1}-1)\,(p^{\,s+1}-1)}\,(p^{\,r+s+2}-1)\,|x|_p^{\,r+s+1} \right]
\end{aligned}
$$

En particulier pour $r = s = 1$ on obtient

$$
\boxed{\,|x|_p * |x|_p \;=\; \frac{1}{p^2+p+1}\left(p^2 - \frac{p^2+1}{p+1}\,|x|_p^{3}\right)\,}\,.
$$