QUATRIEME PARTIE

Espaces associés à une mesure normée positive sur $\mathbb{R}^n$

CHAPITRE XVII

MESURES NORMEES DE BASE $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}$-FONCTIONNELLES SUR $\mathbb{R}^n$

On se donne $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+}$, c-à-d une mesure normée positive sur $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, et on définit les espaces $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$, $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$, $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$, $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ ainsi que leurs propriétés fondamentales. Il s'agit d'une généralisation des espaces décrits dans la Première partie, qui correspondent au cas où $\tilde{\mu} = \mathbb{1}_{[a,b]}$.

§ 1. Mesures normées de base $\tilde{\mu}$

1.1. Définition :

$\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on pose $\|f\|_{\tilde{\mu},1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,\tilde{\mu}$ et $\|f\|_{\tilde{\mu},2} = \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}^2\,\tilde{\mu}\Big]^{1/2}$.

1.2.* Théorème : $\|\ \|_{\tilde{\mu},1}$ et $\|\ \|_{\tilde{\mu},2}$ sont des semi-normes sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{\tilde{\mu},1} \le \|\tilde{\mu}\|_\star \, \|f\| \quad \text{et} \quad \|f\|_{\tilde{\mu},2} \le \sqrt{\|\tilde{\mu}\|_\star}\, \|f\|\,.$$

1.3.* Théorème : $\forall f, g \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f g\|_{\tilde{\mu},1} \le \|f\|_{\tilde{\mu},2}\, \|g\|_{\tilde{\mu},2}$.

1.4.* Corollaire : $\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f\|_{\tilde{\mu},1} \le \sqrt{\|\tilde{\mu}\|_\star}\, \|f\|_{\tilde{\mu},2}$.

1.5. Définition : On pose $\boxed{\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n).\tilde{\mu} = \big\{ h.\tilde{\mu} \;\big\|\; h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \big\}}$.

$\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n).\tilde{\mu}$ est un sous-espace de l'espace de Riesz-Banach $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$.

1.6. Définition :

On note $[\tilde{\mu}]$ la fermeture de $\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n).\tilde{\mu}$ dans $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\ \|_\star$

Les éléments de $[\tilde{\mu}]$ s'appellent les mesures normées de base $\tilde{\mu}$.

1.7.* Théorème : $[\tilde{\mu}]$ est un espace de Riesz-Banach pour la norme $\|\ \|_\star$.

1.8. Théorème : $\boxed{[\tilde{\mu}] \text{ est un sous-espace intégral de } \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n).}$

Dém : Analogue au cas de $\mathcal{L}^1$ dans la première partie.

1.9. Lemme : $\boxed{\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \text{on a} \quad f\tilde{\mu} \in [\tilde{\mu}]}$.

Dém : Soit d'abord $f \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n)$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$; alors on a $f_n\,\tilde{\mu} \overset{\star}{\to} f\,\tilde{\mu}$, donc $f\,\tilde{\mu} \in [\tilde{\mu}]$.

Soit ensuite $f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$ et soit $\mathcal{A} = \{ g\,\tilde{\mu} \,\|\, g \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ g \le f \} \subset [\tilde{\mu}]$;

$\mathcal{A}$ est une partie de $[\tilde{\mu}]$ dominée supérieurement et stable pour la loi $\vee$ et on a par définition $f\,\tilde{\mu} = \operatorname{Sup} \mathcal{A}$; il existe donc une suite $g_n \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^n)$ telle que $g_n\,\tilde{\mu} \overset{\star}{\to} f\,\tilde{\mu}$; donc $f\,\tilde{\mu} \in [\tilde{\mu}]$.

1.10. Théorème : $\boxed{\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n) \quad \forall \tilde{\nu} \in [\tilde{\mu}] \quad \text{on a} \quad f\,\tilde{\nu} \in [\tilde{\mu}]}$.

Dém : Soit $\tilde{\nu} \in [\tilde{\mu}]$ et soit une suite $h_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $h_n\,\tilde{\mu} \overset{\star}{\to} \tilde{\nu}$;
on a $\forall n \in \mathbb{N} \ \ f\,h_n\,\tilde{\mu} \in [\tilde{\mu}]$ car $f\,h_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$;
de plus $\| f\,\tilde{\nu} - f\,h_n\,\tilde{\mu} \|_\star \le \|f\|\,\|\tilde{\nu} - h_n\,\tilde{\mu}\|_\star \to 0$; donc $f\,\tilde{\nu} \in [\tilde{\mu}]$.

1.11.* Corollaire : $[\tilde{\mu}]$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R}^n)$.

§ 2. $\tilde{\mu}$-fonctionnelles sommables

On pose $\boxed{\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) = \dfrac{1}{\tilde{\mu}}\,[\tilde{\mu}] = \left\{ \dfrac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}} \,\middle\|\, \tilde{\nu} \in [\tilde{\mu}] \right\}}$; on a donc $\boxed{[\tilde{\mu}] = \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \,.\, \tilde{\mu}}$.

Les éléments de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ s'appellent les $\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables ; nous les représenterons par des lettres “droites” ; on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \ \Rightarrow \ \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \in [\tilde{\mu}] \subset \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Le “dénominateur $\tilde{\mu}$” dans la définition des $\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables est purement formel ; en conséquence la propriété essentielle des $\tilde{\mu}$–fonctionnelles sommables est leur aptitude à se transformer en mesures normées *si on les multiplie par* $\tilde{\mu}$.

2.1. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\tilde{\mu}(\mathrm{f}) = (\mathrm{f}\,\tilde{\mu})(\mathbb{1}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{1} = 1_{\mathbb{R}^n}}$.

Notation intégrale : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on note $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}(x)\,\tilde{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\mathrm{f})}$.

2.2. <u>Définition</u> : On munit $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ d'une structure d'espace de Riesz en transférant naturellement à $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ la structure de l'espace $[\,\tilde{\mu}\,]$: on pose $\forall\, \mathrm{f}\,,\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\mathrm{f} + \mathrm{g} \;=\; \dfrac{\mathrm{f}\,\tilde{\mu} + \mathrm{g}\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} \\[2ex]
\forall\, h \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}) \quad h\,\mathrm{f} \;=\; \mathrm{f}\,h \;=\; \dfrac{h\,(\mathrm{f}\,\tilde{\mu})}{\tilde{\mu}} \\[2ex]
\mathrm{f} \le \mathrm{g} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{f}\,\tilde{\mu} \le \mathrm{g}\,\tilde{\mu} \\[2ex]
\mathrm{f} \vee \mathrm{g} \;=\; \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}) \vee (\mathrm{g}\,\tilde{\mu})}{\tilde{\mu}} \qquad \mathrm{f} \wedge \mathrm{g} \;=\; \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}) \wedge (\mathrm{g}\,\tilde{\mu})}{\tilde{\mu}} \\[2ex]
\mathrm{f}^+ = \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde{\mu})^+}{\tilde{\mu}} \qquad \mathrm{f}^- = \dfrac{(\mathrm{f}\,\tilde{\mu})^-}{\tilde{\mu}} \qquad |\mathrm{f}| \;=\; \dfrac{|\,\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\,|}{\tilde{\mu}}
\end{array}}$$

2.3. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},1} \;=\; \|\,\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\,\|_\star \;=\; \tilde{\mu}\,(\,|\,\mathrm{f}\,|\,)}$.

2.4. <u>Définition</u> : $\forall\, \mathrm{f}_n\,,\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on écrit $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \mathrm{f}}$ ssi $\|\,\mathrm{f}_n - \mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},1} \to 0$.

On dit que f_n converge vers f <u>en norme</u> $\|\ \|_{\tilde{\mu},1}$ et on note $\boxed{\mathrm{f} \;=\; {}^1\!\lim_n\ \mathrm{f}_n}$.

2.5.* <u>Théorème</u> :

$\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ est un espace de Riesz-Banach et un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

2.6.* <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \mathrm{f} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{f}_n\,\tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \mathrm{f}\,\tilde{\mu}}$.

2.7.* <u>Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$</u>

Soit $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ une suite <u>monotone</u> ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\|\mathrm{f}_n\|_{\tilde{\mu},1} \le M$; alors f_n converge en norme $\|\ \|_{\tilde{\mu},1}$ vers une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$; on a donc aussi $\lim_n \|\mathrm{f}_n\|_{\tilde{\mu},1} = \|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},1}$.

2.8. <u>Définition</u> :

Une suite $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ est <u>dominée</u> ssi la suite $\mathrm{f}_n\,\tilde{\mu} \in [\,\tilde{\mu}\,]$ est dominée.

2.9. Définition : Soit une suite dominée $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$; on pose

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_n \mathrm{f}_n = \frac{1}{\tilde{\mu}} \operatorname*{Sup}_n (\mathrm{f}_n \tilde{\mu}) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf}_n \mathrm{f}_n = \frac{1}{\tilde{\mu}} \operatorname*{Inf}_n (\mathrm{f}_n \tilde{\mu})}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\overline{\operatorname*{Lim}_n} \mathrm{f}_n = \frac{1}{\tilde{\mu}} \overline{\operatorname*{Lim}_n} (\mathrm{f}_n \tilde{\mu}) \quad \text{et} \quad \underline{\operatorname*{Lim}_n} \mathrm{f}_n = \frac{1}{\tilde{\mu}} \underline{\operatorname*{Lim}_n} (\mathrm{f}_n \tilde{\mu})}\,.$$

2.10. Définition : On dit que la suite dominée $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ converge $\tilde{\mu}$–finement vers $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ ssi $\boxed{\mathrm{f} = \overline{\operatorname*{Lim}_n} \mathrm{f}_n = \underline{\operatorname*{Lim}_n} \mathrm{f}_n}$. On écrit $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f}}$ et on note $\boxed{\mathrm{f} = \operatorname*{Lim}_n \mathrm{f}_n}$.

2.11.* Théorème : $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{f}_n \tilde{\mu} \overset{\times}{\to} \mathrm{f}\,\tilde{\mu}}$.

2.12.* Théorème : $\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f} \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{f}_n - \mathrm{f}| \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} 0$.

2.13. Définition : $\forall f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$ on pose $\boxed{\{f\}_{\tilde{\mu}} = \frac{f\,\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

$\{f\}_{\tilde{\mu}}$ s'appelle la $\tilde{\mu}$–fonctionnelle associée à f.

2.14.* Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \to \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;:\; f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}}$ est un morphisme de Riesz.

2.15.* Corollaire :

$$\boxed{\forall f, g \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R}^n) \quad \{f \vee g\}_{\tilde{\mu}} = \{f\}_{\tilde{\mu}} \vee \{g\}_{\tilde{\mu}} \quad \text{et} \quad \{f \wedge g\}_{\tilde{\mu}} = \{f\}_{\tilde{\mu}} \wedge \{g\}_{\tilde{\mu}}}\,.$$

2.16. Théorème : $\boxed{\text{Soient } f_n, f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \text{ tels que } f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f \text{ ; alors } \{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{f\}_{\tilde{\mu}}}$.

Dém : C'est le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$ appliqué à $\tilde{\mu}$.

Notation : On note $\underline{\mathcal{W}_B}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}} = \big\{\{f\}_{\tilde{\mu}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \;\big\|\; f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})\big\} \subset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$;

c'est l'image du morphisme du Théorème 2.14.

On utilise des notations analogues pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

Dans la pratique on remplacera couramment la notation $\{f\}_{\tilde{\mu}}$ par la notation f.

2.17.* Théorème : $\underline{\mathcal{E}_O}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}}$ et $\underline{\mathcal{C}_O}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}}$ sont denses dans $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

§ 3. $\tilde{\mu}$-fonctionnelles hilbertiennes

3.1. Définition : On note $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ formé des $\tilde{\mu}$-fonctionnelles f pour lesquelles il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \quad \big(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\big)(g) \leq M \,\|\, g \,\|_{\tilde{\mu},2}}$.

On a donc $\boxed{\mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) \subset \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})}$.

Les éléments de $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ s'appellent les $\tilde{\mu}$-fonctionnelles hilbertiennes.

3.2. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},2} = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \\ \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},2} = 1}} \big(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}\big)(g)}$

3.3. Définition : $\forall\, \mathrm{f}_n\,,\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on écrit $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},2} \mathrm{f}}$ ssi $\|\,\mathrm{f}_n - \mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},2} \to 0$.

On dit que f_n converge vers f en norme $\|\ \|_{\tilde{\mu},2}$ et on note $\boxed{\mathrm{f} = {}^2\lim_n \mathrm{f}_n}$.

3.4.* Théorème : $\big(\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})\,,\ \|\ \|_{\tilde{\mu},2}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

3.5. Théorème : $\underline{\mathcal{E}_O}\,(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}}$ et $\underline{\mathcal{C}_O}\,(\mathbb{R}^n)_{\tilde{\mu}}$ sont denses dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$.

Dém : Analogue au cas de $\mathcal{L}^2$ dans la Première partie.

3.6.* Théorème :

$$\boxed{\big(\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})\,.\,\tilde{\mu}\ ,\ \|\ \|_{\tilde{\mu},2}\big) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)\,,\ \|\ \|_{\tilde{\mu},2}\big).}$$

3.7.* Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$

Soit $\mathrm{f}_n \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\mathrm{f}_n\|_{\tilde{\mu},2} \leq M$; alors f_n converge en norme $\|\ \|_{\tilde{\mu},2}$ vers une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$; on a donc aussi $\lim_n \|\mathrm{f}_n\|_{\tilde{\mu},2} = \|\mathrm{f}\|_{\tilde{\mu},2}$.

Le $\boxed{\text{produit}}$ dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ se définit comme pour $\tilde{\mu} = \mathbb{1}_{[a,b]}$.

3.8.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},2} = \sqrt{\|\,\mathrm{f}^2\,\|_{\tilde{\mu},1}}$.

3.9.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f}\,,\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\,\mathrm{f}\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},1} \leq \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},2}\ \|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},2}$.

3.10.* Corollaire : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},1} \leq \sqrt{\|\,\tilde{\mu}\,\|_\star}\ \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde{\mu},2}$.

3.11.* Théorème : $\boxed{\mathrm{f}_n \xrightarrow{\tilde\mu,2} \mathrm{f} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{f}_n^2\,\tilde\mu \xrightarrow{\star} \mathrm{f}^2\,\tilde\mu}$.

3.12. Définition : On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ en posant

$\forall\, \mathrm{f}\,,\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde\mu)$ $\boxed{\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle_{\tilde\mu} = \tilde\mu\,(\mathrm{f\,g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{f\,g}\,\tilde\mu}$.

3.13.* Théorème : $\big(\mathcal{L}^2(\tilde\mu)\,,\, \langle\ ,\ \rangle_{\tilde\mu}\big)$ est un espace de Riesz-Hilbert.

§ 4. $\tilde\mu$-fonctionnelles bornées

4.1. Définition :

On note $\mathcal{B}(\tilde\mu)$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ formé des $\tilde\mu$-fonctionnelles f pour lesquelles

il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n) \quad \big(\mathrm{f}\,\tilde\mu\big)(g) \le M\,\|\,g\,\|_{\tilde\mu,1}}$.

Les éléments de $\mathcal{B}(\tilde\mu)$ s'appellent les $\tilde\mu$-fonctionnelles bornées.

4.2. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ on pose $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,\mathrm{B}} = \sup_{\substack{g\in\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)\\ \|g\|_{\tilde\mu,1}=1}} \big(\mathrm{f}\,\tilde\mu\big)(g)}$

4.3.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ on a $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,\mathrm{B}} = \inf_{\substack{M\in\mathbb{R}^+\\ M\ge|\mathrm{f}|}} M}$

4.4.* Théorème : $\boxed{\mathcal{B}(\tilde\mu) \subset \mathcal{L}^2(\tilde\mu)}$.

4.5.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ $\boxed{|\,\mathrm{f}\,| \le \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,\mathrm{B}}}$ et $\boxed{\|\,\mathrm{f}\,\|^2_{\tilde\mu,2} \le \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,\mathrm{B}}\,\|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,1}}$.

4.6.* Théorème : $\big(\mathcal{B}(\tilde\mu)\,,\, \|\ \|_{\tilde\mu,\mathrm{B}}\big)$ est une algèbre de Riesz-Banach.

4.7.* Théorème :

$\boxed{\big(\mathcal{B}(\tilde\mu).\tilde\mu\,,\, \|\ \|_{\tilde\mu,\mathrm{B}}\big) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)\,,\, \|\ \|_{\tilde\mu,1}\big)}$

Le $\boxed{\text{produit}}$ f g avec $\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ et $\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ se définit comme pour $\tilde\mu = \mathbb{1}_{[a,b]}$.

4.8. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ $\forall\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ on pose $\boxed{\big(\mathrm{f}\,\tilde\mu\big)(\mathrm{g}) = \big(\mathrm{g}\,\tilde\mu\big)(\mathrm{f}) = \tilde\mu\,(\mathrm{f\,g})}$.

4.9.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde\mu)$ $\forall\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ on a $\|\,\mathrm{f\,g}\,\|_{\tilde\mu,1} \le \|\,\mathrm{f}\,\|_{\tilde\mu,\mathrm{B}}\;\|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde\mu,1}$.

4.10.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu}) \quad \forall\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\|\, \mathrm{f\, g} \,\|_{\tilde{\mu},2} \leq \|\, \mathrm{f} \,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} \;\|\, \mathrm{g} \,\|_{\tilde{\mu},2}$.

4.11.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$.

4.12. <u>Théorème</u> : $\boxed{\underline{\mathcal{W}_B}\,(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}} = \mathcal{B}(\tilde{\mu})}$.

Ce théorème signifie que l'application $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \to \mathcal{B}(\tilde{\mu})$: $f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}$ est <u>surjective</u>.
Plus précisément tout $\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ peut être représentée comme une <u>limite simple bornée</u> de fonctions <u>pseudo-réglées</u>.

<u>Dém</u> :

On montre facilement $\underline{\mathcal{W}_B}\,(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}} \subset \mathcal{B}(\tilde{\mu})$; démontrons l'inclusion opposée.
Soit $\mathrm{f} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$; soit une suite <u>bornée</u> $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}^n)$ telle que $\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \mathrm{f}$;
en considérant éventuellement une sous-suite on peut supposer $\boxed{\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f}}$.
Posons $\forall\, p \geq n \in \mathrm{I\!N} \quad g_{n\,,\,p} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \ldots \wedge f_p \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}^n)$ et $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$
$g_n = \inf\limits_{r \geq n} f_r \in \mathcal{PR}_B(\mathrm{I\!R}^n)$; quand $p \to +\infty$ on a $\forall\, n \in \mathrm{I\!N} \quad g_{n\,,\,p} \xrightarrow{\mathrm{b}} g_n$,
donc $\{g_{n\,,\,p}\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{g_n\}_{\tilde{\mu}}$, c-à-d $\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \wedge \{f_{n+1}\}_{\tilde{\mu}} \wedge \ldots \wedge \{f_p\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{g_n\}_{\tilde{\mu}}$,
c-à-d $\operatorname*{Inf}\limits_{r \geq n} \{f_r\}_{\tilde{\mu}} = \{g_n\}_{\tilde{\mu}}$.
Posons $g = \sup\limits_{n} g_n = \underline{\lim\limits_{n}}\, f_n \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$; on a $g_n \xrightarrow{\mathrm{b}} g$, donc $\{g_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \{g\}_{\tilde{\mu}}$,
c-à-d $\operatorname*{Sup}\limits_{n} \{g_n\}_{\tilde{\mu}} = \{g\}_{\tilde{\mu}}$, c-à-d $\underline{\operatorname*{Lim}\limits_{n}}\, \{f_n\}_{\tilde{\mu}} = \operatorname*{Sup}\limits_{n} \left(\operatorname*{Inf}\limits_{r \geq n} \{f_r\}_{\tilde{\mu}} \right) = \{g\}_{\tilde{\mu}}$;
or $\{f_n\}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} \mathrm{f}$, donc $\mathrm{f} = \underline{\operatorname*{Lim}\limits_{n}}\, \{f_n\}_{\tilde{\mu}} = \{g\}_{\tilde{\mu}} \in \underline{\mathcal{W}_B}\,(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}}$.
La fonctionnelle bornée f peut donc être représentée par $g \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$, qui est la limite simple bornée des fonctions $g_n \in \mathcal{PR}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

4.13.* <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$ on a $\|\, f \,\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} \leq \|\, f \,\|$.

4.14.* <u>Théorème</u> :

L'application $\boxed{\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \to \mathcal{B}(\tilde{\mu}) \;:\; f \mapsto \{f\}_{\tilde{\mu}}}$ est un <u>algébromorphisme de Riesz</u>.

4.15.* <u>Corollaire</u> : $\boxed{\forall\, f,\, g \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \quad \{f\, g\}_{\tilde{\mu}} = \{f\}_{\tilde{\mu}}\, \{g\}_{\tilde{\mu}} = f \cdot \{g\}_{\tilde{\mu}}}$.

4.16.* <u>Théorème</u> : 1) $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.
2) $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$ est un algébromodule de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

4.17. <u>Définition</u> : On pose

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathrm{I\!R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \,\|\, \{f\}_{\tilde{\mu}} = 0 \right\} = \left\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \,\|\, f\,\tilde{\mu} = 0 \right\} ;$$

c'est l'espace des fonctions universelles bornées <u>*nulles $\tilde{\mu}$-presque partout*</u>.

4.18.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathrm{I\!R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) \,\|\, \tilde{\mu}\left(|f|\right) = 0 \right\}$.

4.19.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathrm{I\!R}^n)$ est un <u>idéal</u> et un sous-espace cohérent et intégral de $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)$; de plus on a $\boxed{\mathcal{B}(\tilde{\mu}) \cong \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n)/\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\tilde{\mu}}(\mathrm{I\!R}^n)}$.

§ 5. <u>$\tilde{\mu}$-fonctionnelles caractéristiques</u>

5.1. <u>Définition</u> : On pose $\mathcal{K}(\tilde{\mu}) = \left\{ \sigma \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) \,\|\, \sigma^2 = \sigma \right\} \subset \mathcal{B}(\tilde{\mu})$.

Les éléments de $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ s'appellent les <u>$\tilde{\mu}$-fonctionnelles caractéristiques</u>.

5.2.* <u>Théorème</u> : $\forall$ f $\in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$ on a $\|\sigma\|_{\tilde{\mu},2} = \sqrt{\|\sigma\|_{\tilde{\mu},1}}$

5.3.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \sigma_n, \sigma \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$ on a $\sigma_n \overset{\tilde{\mu},1}{\longrightarrow} \sigma \;\Leftrightarrow\; \sigma_n \overset{\tilde{\mu},2}{\longrightarrow} \sigma$.

5.4.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$ est une partie <u>fermée</u> de $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ et de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

On pose $\mathcal{EK}_O(\mathrm{I\!R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}^n) \,\|\, f^2 = f \right\} = \left\{ f \in \mathcal{R}_O(\mathrm{I\!R}^n) \,\|\, f^2 = f \right\}$.

5.5.* <u>Théorème</u> : $\underline{\mathcal{EK}_O}(\mathrm{I\!R}^n)_{\tilde{\mu}}$ est dense dans $\mathcal{K}(\tilde{\mu})$.

§ 6. <u>$\tilde{\mu}$-support</u>

Soit $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n)$; comme $[\tilde{\mu}]$ est un sous-espace intégral de $\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n)$, on peut écrire $\operatorname{Sup}_n \tilde{\mu} \wedge \left(n\,|\tilde{\nu}|\right) \in [\tilde{\mu}]$; plus précisément :

6.1.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n)$ $\boxed{\operatorname{Sup}_n \tilde{\mu} \wedge \left(n\,|\tilde{\nu}|\right) \in \mathcal{K}(\tilde{\mu}).\,\tilde{\mu}}$.

6.2. <u>Définition</u> : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n)$ on pose

$$\boxed{\mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\nu}) = \underline{\tilde{\mu}\text{-support}} \text{ de } \tilde{\nu} = \frac{1}{\tilde{\mu}}\left[\operatorname{Sup}_n \tilde{\mu} \wedge \left(n\,|\tilde{\nu}|\right)\right] \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})}.$$

6.3. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose

$$\boxed{\mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{f}) \;=\; \underline{\tilde{\mu}\text{-support}} \text{ de f} \;=\; \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{f}\,\tilde{\mu}) \;=\; \operatorname*{Sup}_n \; 1\!\!1 \wedge \big(n\,|\mathrm{f}|\big) \,\in\, \mathcal{K}(\tilde{\mu})}\,.$$

6.4.* Théorème : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on a $\big[\, \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{f}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{f} = 0 \,\big]$.

6.5.* Théorème : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n)$ on a $\big[\, \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\nu}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{\mu} \wedge |\tilde{\nu}| = 0 \,\big]$.

§ 7. Théorème de Radon-Nikodym

7.1. Définition : On note $[\,\tilde{\mu}\,]^{\perp} \;=\; \big\{\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n) \;\big\|\; \tilde{\mu} \wedge |\tilde{\nu}| = 0 \,\big\}$.

Les éléments de $[\,\tilde{\mu}\,]^{\perp}$ s'appellent les mesures normées étrangères à $\tilde{\mu}$.

7.2.* Théorème : $[\,\tilde{\mu}\,]^{\perp}$ est un sous-espace cohérent $\boxed{\text{intégral}}$ et fermé de $\mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n)$.

7.3.* Théorème : $[\,\tilde{\mu}\,] \cap [\,\tilde{\mu}\,]^{\perp} = \{0\}$.

7.4. Définition : On pose

- $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n)^+ \qquad \tilde{\nu}_* \;=\; \operatorname*{Sup}_n \; \big[\,(n\,\tilde{\mu}) \wedge \tilde{\nu}\,\big] \;\in\; [\,\tilde{\mu}\,]$
- $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n) \qquad \tilde{\nu}_* \;=\; (\tilde{\nu}^{\,+})_* - (\tilde{\nu}^{\,-})_*$

7.5.* Théorème : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n)^+$ on a $\boxed{\tilde{\nu}_* \;=\; \mathrm{Sup}\,\big\{\, \tilde{\nu}\,' \in [\,\tilde{\mu}\,] \;\big\|\; \tilde{\nu}\,' \leq \tilde{\nu} \,\big\}}$.

7.6.* Théorème : $\forall\, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n)$ on a $\boxed{\mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\nu}_*) \;=\; \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\tilde{\nu})}$ et $\boxed{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_* \;\in\; [\,\tilde{\mu}\,]^{\perp}}$.

7.7.* Théorème de Radon-Nikodym : $\boxed{\mathcal{M}^{\bullet}(\mathrm{I\!R}^n) = [\,\tilde{\mu}\,] \bigoplus [\,\tilde{\mu}\,]^{\perp}}$.

§ 8. Indicateurs de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$

8.8. Définition : $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\big\{\mathrm{f} > 0\big\} \;=\; \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{f}^+)}$

$\big\{\mathrm{f} < 0\big\} = \big\{ -\mathrm{f} > 0\big\} \;=\; \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{f}^-)$

$\boxed{\big\{\mathrm{f} \neq 0\big\} \;=\; \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{f})}$ etc ... etc ...

Remarque : En toute rigueur il faudrait utiliser une notation du type $\{\ \}_{\tilde{\mu}}$, mais par souci de simplification nous négligerons l'indice $\tilde{\mu}$.

8.9. Définition : $\forall\, \mathrm{f}\,,\, \mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose

$$\big\{\mathrm{f} > \mathrm{g}\big\} = \big\{\mathrm{g} < \mathrm{f}\big\} = \big\{\mathrm{f} - \mathrm{g} > 0\big\} = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,[\,(\mathrm{f}-\mathrm{g})^+]$$

$$\big\{\mathrm{f} \neq \mathrm{g}\big\} = \big\{\mathrm{f} - \mathrm{g} \neq 0\big\} = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{f}-\mathrm{g}) \quad \text{etc} \ldots \text{ etc} \ldots$$

8.10. Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; on pose $\forall\, \mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$

$$\big\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}\big\} = \big\{a \leq \mathrm{f} \leq b\big\} = \big\{a \leq \mathrm{f}\big\}\big\{\mathrm{f} \leq b\big\} \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [\,a\,, b\,]$$

$$\big\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}\big\} = \big\{a \leq \mathrm{f} < b\big\} = \big\{a \leq \mathrm{f}\big\}\big\{\mathrm{f} < b\big\} \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [\,a\,,\, b\,[$$

$$\big\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}\big\} = \big\{a \leq \mathrm{f}\big\} \quad \text{si} \quad \mathrm{I} = [\,a\,,\, +\infty\,[\quad \text{etc} \ldots \text{ etc} \ldots .$$

8.11. Définition : Une partie A de $\mathbb{R}$ est élémentaire ssi $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{A}} \in \mathcal{E}\mathcal{K}(\mathbb{R})}$.

Une partie élémentaire de $\mathbb{R}$ est donc constituée d'une réunion finie ou dénombrable d'intervalles que l'on peut toujours supposer *disjoints* .

Notation : Si $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ est élémentaire on pose $\boxed{\tilde{\mu}\,(\mathrm{A}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1}_{\mathrm{A}})}$;

si de plus $\mathrm{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ on pose $\boxed{\displaystyle\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f}\,\tilde{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}\ \mathbb{1}_{\mathrm{A}}\ \tilde{\mu}}$.

8.12. Définition : Si $\mathrm{A} = \bigcup \mathrm{I}_r$ est une partie élémentaire de $\mathbb{R}$ et si les I_r sont des intervalles disjoints , on pose $\boxed{\big\{\mathrm{f} \in \mathrm{A}\big\} = \sum\limits_r \big\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}_r\big\}} \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$.

La série $\sum\limits_r \big\{\mathrm{f} \in \mathrm{I}_r\big\}$ converge finement , de manière évidente .

8.13. Définition : Les applications $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) \to \mathcal{K}(\tilde{\mu})$: $\mathrm{f} \mapsto \big\{\mathrm{f} \in \mathrm{A}\big\}$

$$\big[\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})\big]^2 \to \mathcal{K}(\tilde{\mu}) \ : \ (\mathrm{f}\,,\, \mathrm{g}) \mapsto \big\{\mathrm{f} > \mathrm{g}\big\} \quad \text{etc} \ldots$$

s'appellent les indicateurs de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

§ 9. $\tilde{\mu}$-fonctionnelles

On définit $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, l'espace des $\tilde{\mu}$-fonctionnelles en suivant les mêmes méthodes que pour $\mathcal{FO}$. C'est une algèbre de Riesz contenant $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$. La théorie est analogue à celle de $\mathcal{FO}$.

En particulier on peut définir dans $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ les convergences ms , p.p. , A , E , qui sont bien entendu ***relatives à la mesure*** $\tilde{\mu}$; nous conservons néanmoins les ***mêmes notations*** que dans $\mathcal{FO}$, ***sans faire explicitement référence à*** $\tilde{\mu}$.

Récapitulatif

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & \mathcal{FO}(\tilde{\mu}) & & & & \\
 & & & & & & \cup & & & & \\
\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R}^n) & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{B}(\tilde{\mu}) & \subset & \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}) & \subset & \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}) & \xrightarrow{\times\,\tilde{\mu}} & [\,\tilde{\mu}\,] & \subset & \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n) \\
\cup & & \cup & & & & & & & & \cup \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{B},\,\tilde{\mu}}(\mathrm{I\!R}^n) & & \mathcal{K}(\tilde{\mu}) & & & & & & & & [\,\tilde{\mu}\,]^\perp
\end{array}}$$

§ 10. Composée d'une $\tilde{\mu}$-fonctionnelle et d'une fonction réglée

On suppose toujours $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n)^+}$ $(n \in \mathrm{I\!N}^*)$ et on se donne $\boxed{\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})}$.

10.1. Définition : Soit $h \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R})$; on peut écrire $h = \sum_r \alpha_r 1_{\mathrm{I}_r}$, où les intervalles I_r sont disjoints et où $\forall\, r \;\; \alpha_r \in \mathrm{I\!R}$; on pose $\boxed{h \circ \mathrm{F} = \sum_r \alpha_r \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\right\}} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.

La série $\sum_r \alpha_r \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\right\}$ converge exactement, de manière évidente.

10.2.* Théorème : Si A est une partie élémentaire de $\mathrm{I\!R}$ on a $\boxed{1\!\!1_{\mathrm{A}} \circ \mathrm{F} = \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{A}\right\}}$.

10.3.* Théorème :

L'application $\mathcal{E}(\mathrm{I\!R}) \to \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$: $h \mapsto h \circ \mathrm{F}$ est un algébromorphisme de Riesz.

En particulier on a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R})$ $\boxed{|\,h \circ \mathrm{F}\,| = |h| \circ \mathrm{F}}$.

10.4. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ on a $h \circ \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ et $\boxed{|\, h \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\, h\,\|}$.

Dém : On peut écrire $h = \sum\limits_r \alpha_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$, où les intervalles I_r sont disjoints et où $\forall\, r \;\; |\alpha_r| \leq \|h\|$; alors on a $h \circ \mathrm{F} = \sum\limits_r \alpha_r \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\right\} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ et $|\, h \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\, h\,\| \,.\, \sum \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\right\} \leq \|\, h\,\|$.

10.5.* Corollaire :

Soient $g\,,\, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tels que $g - h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$; alors $\boxed{|\, g \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\, g - h\,\|}$.

10.6. Théorème-Définition :

Soit $h \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ et soit une suite $h_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ telle que $h_n \overset{\mathbf{u}}{\to} h$; alors $h_n \circ \mathrm{F}$ converge en mesure dans $\mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; on pose $\boxed{h \circ \mathrm{F} = \text{ limite en mesure de } h_n \circ \mathrm{F}} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.
$h \circ \mathrm{F}$ ne dépend pas de la suite particulière $h_n \overset{\mathbf{u}}{\to} \mathrm{h}$.

Dém : On a $\forall\, p\,,\, q \in \mathbb{N} \;\; |\, h_p \circ \mathrm{F} - h_q \circ \mathrm{F}\,| \leq \|\, h_p - h_q\,\|$, donc $\|\, h_p \circ \mathrm{F} - h_q \circ \mathrm{F}\,\|_{\tilde{\mu},1} \leq \|\, h_p - h_q\,\|\, \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$. La suite $h_n \circ \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ est donc de Cauchy pour la norme $\|\;\|_{\tilde{\mu},1}$ et donc aussi pour la convergence en mesure.

10.7.* Théorème :

L'application $\mathcal{R}(\mathbb{R}) \to \mathcal{FO}(\tilde{\mu}) \;:\; h \mapsto h \circ \mathrm{F}$ est un algébromorphisme de Riesz.
En particulier on a $\forall\, h \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ $\boxed{|\, h \circ \mathrm{F}\,| = |h| \circ \mathrm{F}}$.

10.8. Théorème : Soit $h \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ une fonction *strictement croissante* et soit $\alpha \in \mathbb{R}$; alors $\boxed{\left\{h \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\right\} = \left\{\mathrm{F} > \alpha\right\}}$.

Dém : Soit p_n une suite *croissante* de fonctions étagées convergeant uniformément vers h sur l'intervalle $]-\infty\,,\,\alpha\,]$; soit q_n une suite *croissante* de fonctions étagées, convergeant uniformément vers h sur l'intervalle $]\,\alpha\,,\,+\infty\,]$, de la forme
$q_n = h(\alpha)\, 1_{]\,\alpha\,,\,\alpha+1/n\,[} + \sum\limits_r c_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$, où les intervalles I_r forment une partition de $[\,\alpha + 1/n\,,\,+\infty\,]$ et où $\forall\, r \;\; c_r > h(\alpha)$. On pose $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; k_n = p_n \cup q_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.
On a $k_n \circ \mathrm{F} = \left[\,p_n \circ \mathrm{F}\,\right] \cup \left[\,h(\alpha)\left\{\alpha < \mathrm{F} < \alpha + 1/n\right\} + \sum\limits_r c_r \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\right\}\right]$,
donc $\left\{k_n \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\right\} = \sum\limits_r \left\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\right\} = \left\{\mathrm{F} > \alpha\right\} - \left\{\alpha < \mathrm{F} < \alpha + 1/n\right\}$.
La suite k_n est croissante et converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$; la suite $k_n \circ \mathrm{F}$ est donc aussi croissante et converge en mesure vers $h \circ \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.

On en déduit $\{k_n \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \{h \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\}$;

or $\{k_n \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\} = \{\mathrm{F} > \alpha\} - \{\alpha < \mathrm{F} < \alpha + 1/n\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \{\mathrm{F} > \alpha\} - \{\alpha < \mathrm{F} \leq \alpha\}$
$= \{\mathrm{F} > \alpha\}$, donc $\{h \circ \mathrm{F} > h(\alpha)\} = \{\mathrm{F} > \alpha\}$.

§ 11. Composée d'une $\tilde{\mu}$-fonctionnelle sommable et d'une fonction lipschitzienne

On peut définir de manière alternative la composée d'une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle *sommable* et d'une fonction *lipschitzienne*. Nous présentons brièvement la méthode ci-dessous.

On se donne la fonction $\boxed{h \in \mathcal{C}(\mathrm{I\!R})}$, lipschitzienne de constante $k > 0$.

11.1. Lemme : Soit $f \in \mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R}^n)$; alors $h \circ f \in \mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

Dém : Il existe $a, b > 0$ tels que $\forall x \in \mathrm{I\!R} \quad |h(x)| \leq a + b\,|x|$; on en déduit $|h \circ f| \leq a + b\,|f|$, donc $h \circ f \in \mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R}^n)$.

11.2. Lemme :

Soient $f, g \in \mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R}^n)$; alors on a $\boxed{\| h \circ f - h \circ g \|_{\tilde{\mu},1} \leq k \, \| f - g \|_{\tilde{\mu},1}}$.

Dém : On a $\forall u \in \mathrm{I\!R}^n \quad |(h \circ f)(u) - (h \circ g)(u)| = \big| h[f(u)] - h[g(u)] \big|$
$\leq k \, |f(u) - g(u)|$; donc $\| h \circ f - h \circ g \|_{\tilde{\mu},1} \leq k \, \| f - g \|_{\tilde{\mu},1}$.

11.3. Théorème-Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R}^n)$ telle que $f_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \tilde{f}$; alors $h \circ f_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ et on pose

$$\boxed{h \circ \tilde{f} = {}^1\lim_n \, (h \circ f_n)} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}).$$

$h \circ \tilde{f}$ ne dépend pas de la suite particulière $f_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \tilde{f}$.

CHAPITRE XVIII

IMAGE D'UNE MESURE NORMEE POSITIVE

On suppose toujours $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^n)^+}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

§ 1. Image d'une mesure normée postive $\tilde{\mu}$ par une $\tilde{\mu}$-fonctionnelle

Si $\tilde{\mu}$ est une *probabilité* sur $\mathbb{R}^n$ et si F est une fonction réglée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la loi de F est la probabilité sur $\mathbb{R}$ des *valeurs* de F. Nous étendons cette notion au contexte plus général d'une mesure normée positive $\tilde{\mu}$ et d'une $\tilde{\mu}$–fonctionnelle F.

1.1. Définition : Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; on pose $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h) = \tilde{\mu}\,(h \circ \mathrm{F})}$.

En particulier pour tout partie élémentaire A de $\mathbb{R}$ on a $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = \tilde{\mu}\left[\left\{\mathrm{F} \in \mathrm{A}\right\}\right]}$.

$\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$ s'appelle l'$\boxed{\text{IMAGE}}$ de $\tilde{\mu}$ par F (ou $\boxed{\text{LOI}}$ de F relativement à $\tilde{\mu}$, si $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$).

1.2. Théorème : $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+}$ et $\boxed{\|\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,\|_\star = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star}$.

Dém :

1°) $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ $\quad |\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h)\,| = |\,\tilde{\mu}\,(h \circ \mathrm{F})\,| \leq \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star \,\|\, h \circ \mathrm{F}\,\| \leq \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star \,\|\, h\,\|$,
donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathbb{R})$ et $\|\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,\|_\star \leq \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$. De plus on a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})^+$
$\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h) = \tilde{\mu}\,(h \circ \mathrm{F}) \geq 0$, donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \geq 0$. Enfin on a
$\|\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,\|_\star = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1} \circ \mathrm{F}) = \tilde{\mu}\,(\mathbb{1}) = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$.

2°) Démontrons $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$, c-à-d $\forall\, c \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{d \to c^\pm} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = 0$.
On peut supposer $\tilde{\mu} \geq 0$ car $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} = (\tilde{\mu}^+)_{\mathrm{F}} - (\tilde{\mu}^-)_{\mathrm{F}}$.
Prenons par exemple le cas $d \to c^+$;
on a $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\left(1_{]\,c,\,d\,[}\right) = \tilde{\mu}\left(1_{]\,c,\,d\,[} \circ \mathrm{F}\right) = \tilde{\mu}\left[\left\{c < \mathrm{F} < d\right\}\right] = \tilde{\mu}\left[\left\{c < \mathrm{F}\right\}\left\{\mathrm{F} < d\right\}\right]$;
or quand $d \to c^+$ on a $\left\{\mathrm{F} < d\right\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \left\{\mathrm{F} \leq c\right\}$,
donc $\left\{c < \mathrm{F}\right\}\left\{\mathrm{F} < d\right\} \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \left\{c < \mathrm{F}\right\}\left\{\mathrm{F} \leq c\right\} = 0$, c-à-d $\tilde{\mu}\left[\left\{c < \mathrm{F}\right\}\left\{\mathrm{F} < d\right\}\right] \to 0$.

1.3.* Corollaire : Si $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, alors $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

§ 2. Convergences en loi faible et en loi forte

2.1. Lemme :

Soient $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels ; on pose $\forall\, 1 \leq r \leq n \quad \mathrm{I}_r = [\, a_{r-1}\,,\, a_r\,[$;

soit $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r \,.\, \mathbb{1}_{\mathrm{I}_r}$ avec $\forall\, 1 \leq r \leq n \quad \beta_r \in \mathbb{R}$; on pose

$$\boxed{d = \min_{1 \leq r \leq n} (a_r - a_{r-1})} \quad \text{et} \quad \boxed{e = \max_{1 \leq r \leq n} |\beta_r - \beta_{r-1}|} \; ;$$

alors $\forall$ F, G $\in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ on a $\boxed{\big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \big| \leq 2\, \|h\| \,.\, \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| > d \big\} + e}$.

Dém : On pose $\forall\, 1 \leq r \leq n \quad \sigma_r = \big\{ \mathrm{F} \in \mathrm{I}_r \big\}$ et $\tau_r = \big\{ \mathrm{G} \in \mathrm{I}_r \big\}$.

Lemme auxiliaire : $\forall\, r\,,\, s$ on a $\Big[\, |\, r - s| \geq 2 \; \Rightarrow \; \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\}\, \sigma_r\, \tau_s = 0 \,\Big]$.

Démonstration du lemme auxiliaire :

Faisons par exemple la démonstration pour $r = 1$ et $s = 3$.

On a $\big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\}\, \sigma_1\, \tau_3 = \big\{ \mathrm{F} - d \leq \mathrm{G} \leq \mathrm{F} + d \big\} \big\{ a_0 \leq \mathrm{F} < a_1 \big\} \big\{ a_2 \leq \mathrm{G} < a_3 \big\}$

$= \big\{ \mathrm{F} - d \leq \mathrm{G} \big\} \big\{ \mathrm{G} \leq \mathrm{F} + d \big\} \big\{ a_0 \leq \mathrm{F} < a_1 \big\} \big\{ a_2 \leq \mathrm{G} \big\} \big\{ \mathrm{G} < a_3 \big\}$

$= \big\{ a_0 \leq \mathrm{F} < a_1 \big\} \big\{ \mathrm{F} - d < a_3 \big\} \big\{ a_2 < \mathrm{F} + d \big\}$

$= \big\{ a_0 \leq \mathrm{F} < a_1 \big\} \big\{ a_2 - d < \mathrm{F} < a_3 + d \big\} = 0$ car $a_1 \leq a_2 - d$.

Suite de la démonstration du lemme :

On a clairement $\sum\limits_{r=1}^{n} \sigma_r = \sum\limits_{r=1}^{n} \tau_r = 1$, donc

$h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r\, (\sigma_r - \tau_r) = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r \Big[\sigma_r \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \tau_s \Big) - \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \sigma_s \Big) \tau_r \Big]$, donc

$\big(h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \big) \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\} = \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\} \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r \Big[\sigma_r \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \tau_s \Big) - \Big(\sum\limits_{s=1}^{n} \sigma_s \Big) \tau_r \Big]$

$= \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\} \Big[\beta_1\, (\sigma_1\, \tau_2 - \sigma_2\, \tau_1)$

$\qquad + \sum\limits_{r=2}^{n-1} \beta_r\, (\sigma_r\, \tau_{r-1} + \sigma_r\, \tau_{r+1} - \sigma_{r-1}\, \tau_r - \sigma_{r+1}\, \tau_r) + \beta_n\, (\sigma_n\, \tau_{n-1} - \sigma_{n-1}\, \tau_n) \Big]$;

$= \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\} \sum\limits_{r=1}^{n-1} (\beta_r - \beta_{r+1})\, (\sigma_r\, \tau_{r+1} - \sigma_{r+1}\, \tau_r)$,

donc $|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\,| \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}| \leq d \big\} \leq e \sum\limits_{r=1}^{n-1} (\sigma_r\, \tau_{r+1} + \sigma_{r+1}\, \tau_r)$

$$\leq e \Big(\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \Big) \Big(\sum_{r=1}^{n} \tau_r \Big) = e\,.$$

On en déduit

$$|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\,| = |\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\,| \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}\,| > d \big\} + |\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\,| \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}\,| \leq d \big\}$$

$$\leq \big(|\, h \circ \mathrm{F}| + |\, h \circ \mathrm{G}| \big) \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}\,| > d \big\} + e \ \leq \ 2\, \|h\| . \big\{ |\, \mathrm{F} - \mathrm{G}\,| > d \big\} + e .$$

2.2. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n\,,\, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})\,,\ \mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})}$ $h \circ \mathrm{F}_n \overset{\tilde{\mu},1}{\longrightarrow} h \circ \mathrm{F}$, et donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$; si de plus $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}_D^{\bullet}(\mathrm{I\!R})^+}$ on a $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $h \in \mathcal{C}_O(\mathrm{I\!R})$; soit $\varepsilon > 0$; il existe $k \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ tel que $\|\, h - k\,\| \leq \varepsilon$, donc aussi $e \leq 2\,\varepsilon$ (notations du lemme précédent) ;

on a alors $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\big|\, k \circ \mathrm{F}_n - k \circ \mathrm{F} \big| \ \leq\ 2\, \|h\| . \big\{ |\, \mathrm{F}_n - \mathrm{F}\,| > d \big\} + 2\,\varepsilon$,

donc $\big\|\, k \circ \mathrm{F}_n - k \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} \ \leq\ 2\, \|h\| . \big\| \big\{ |\, \mathrm{F}_n - \mathrm{F}\,| > d \big\} \big\|_{\tilde{\mu},1} +\ 2\,\varepsilon\, \|\tilde{\mu}\|_\star$;

donc $\overline{\lim_n}\ \big\|\, k \circ \mathrm{F}_n - k \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} \ \leq\ 2\,\varepsilon\, \|\tilde{\mu}\|_\star$; on peut écrire

$|\, h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F}\,| \ \leq |\, k \circ \mathrm{F}_n - k \circ \mathrm{F}\,| + |\,(h-k) \circ \mathrm{F}_n| + |\,(h-k) \circ \mathrm{F}\,|$

$\leq\ |\, k \circ \mathrm{F}_n - k \circ \mathrm{F}\,| \ +\ 2\, \|\, h - k\,\| \ \leq\ |\, k \circ \mathrm{F}_n - k \circ \mathrm{F}\,| \ +\ 2\,\varepsilon$;

donc $\overline{\lim_n}\ \big\|\, h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} \leq 4\,\varepsilon\, \|\tilde{\mu}\|_\star$; donc $h \circ \mathrm{F}_n \overset{\tilde{\mu},1}{\longrightarrow} h \circ \mathrm{F}$.

Supposons maintenant $h \in \mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})$; on a $\forall\, k\,,\, n \in \mathrm{I\!N}^*$ $\big($avec $\mathsf{X}_k = 1\!\!1_{[\,-k\,,\,k\,]}\big)$

$h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F} = \ (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F}_n \ +\ \big[(1 - \mathsf{X}_k)\, h\big] \circ \mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F} - \big[(1 - \mathsf{X}_k)\, h\big] \circ \mathrm{F}$;

donc $|\, h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F}\,| \leq \big|\, (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F} \big|$

$$+ \big|\, \big[(1 - \mathsf{X}_k)\, h\big] \circ \mathrm{F}_n \big| + \big|\, \big[(1 - \mathsf{X}_k)\, h\big] \circ \mathrm{F} \big|$$

$\leq\ \big|(\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F} \big| \ +\ \|h\|\, \big|(1 - \mathsf{X}_k) \circ \mathrm{F}_n \big| \ +\ \|h\|\, \big|(1 - \mathsf{X}_k) \circ \mathrm{F} \big|$

$\leq\ \big|(\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F} \big| \ +\ \big\{ |\mathrm{F}| > k \big\} \ +\ \big\{ |\mathrm{F}_n| > k \big\}$;

donc $\big\|\, h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} \leq\ \big\|\, (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1}$

$$+\ \big\| \big\{ |\,\mathrm{F}\,| > k \big\} \big\|_{\tilde{\mu},1} +\ \big\| \big\{ |\,\mathrm{F}_n| > k \big\} \big\|_{\tilde{\mu},1} ;$$

soit $\varepsilon > 0$; choisissons $k \in \mathrm{I\!N}^*$ tel que $\big\| \big\{ |\,\mathrm{F}\,| > k \big\} \big\|_{\tilde{\mu},1} \leq \varepsilon$ et $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\big\| \big\{ |\,\mathrm{F}_n| > k \big\} \big\|_{\tilde{\mu},1} \leq \varepsilon$ (c'est possible car $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$) ; on en déduit

$\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\big\|\, h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} \leq\ \big\|\, (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F}_n - (\mathsf{X}_k\, h) \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} +\ 2\,\varepsilon$;

donc $\overline{\lim_n}\ \big\|\, h \circ \mathrm{F}_n - h \circ \mathrm{F} \big\|_{\tilde{\mu},1} \leq\ 2\,\varepsilon$; donc $h \circ \mathrm{F}_n \overset{\tilde{\mu},1}{\longrightarrow} h \circ \mathrm{F}$.

La fin du théorème est une conséquence du Théorème XIV. 5.

2.3. <u>Définition</u> : Supposons $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)$.

On dit que $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ converge $\boxed{\text{en loi faible}}$ vers $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ ssi $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$; on écrit $\mathrm{F}_n \overset{\text{loi}}{\to} \mathrm{F}$.

On dit que $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ converge $\boxed{\text{en loi forte}}$ vers $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ ssi $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$; on écrit $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{Loi}}{\to} \mathrm{F}$.

2.4.* <u>Corollaire</u> :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)$ et $\mathrm{F}_n , \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; alors on a $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\text{ms}}{\to} \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}_n \overset{\text{loi}}{\to} \mathrm{F}}$.

Si de plus $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{P}_D(\mathrm{I\!R})}$ on a $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\text{ms}}{\to} \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}_n \overset{\mathsf{Loi}}{\to} \mathrm{F}}$.

2.5. <u>Théorème</u> :

Soient $\mathrm{F}_n , \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, $\mathrm{F}_n \overset{\text{pp}}{\to} \mathrm{F}$; alors $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})}$ on a $h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} h \circ \mathrm{F}$.

<u>Dém</u> : Analogue au théorème précédent.

2.6. <u>Théorème</u> : Soient $h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ et $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{FO}(\mathrm{I\!R})$; alors on a

$$\boxed{\big|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G} \,\big| \leq 2\, \|h\| . \big\{\mathrm{F} \neq \mathrm{G}\big\}}.$$

<u>Dém</u> : On peut écrire $h = \sum \beta_r \, 1_{\mathrm{I}_r}$; posons $\forall\, 1 \leq r \leq n \quad \sigma_r = \big\{\mathrm{F} \in \mathrm{I}_r\big\}$ et $\tau_r = \big\{\mathrm{G} \in \mathrm{I}_r\big\}$; on a $\forall\, r \quad (\sigma_r - \tau_r)\big\{\mathrm{F} = \mathrm{G}\big\} = 0$, donc $\big(h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\big)\big\{\mathrm{F} = \mathrm{G}\big\} = \sum \beta_r\, (\sigma_r - \tau_r)\big\{\mathrm{F} = \mathrm{G}\big\} = 0$;
donc $|\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\,| = |\, h \circ \mathrm{F} - h \circ \mathrm{G}\,|\big\{\mathrm{F} \neq \mathrm{G}\big\} \leq 2\, \|h\| . \big\{\mathrm{F} \neq \mathrm{G}\big\}$.

2.7.* <u>Corollaire</u> : Soient $\mathrm{F}_n , \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F}$; alors $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R})}$ on a $h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} h \circ \mathrm{F}$, et donc $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}_n} \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$.

2.8.* <u>Corollaire</u> :

Soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)$ et $\mathrm{F}_n , \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$; alors on a $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}_n \overset{\mathsf{Loi}}{\to} \mathrm{F}}$.

2.9.* <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n , \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \mathrm{F}$; alors $\forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R})}$ on a $h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde{\mu},\times} h \circ \mathrm{F}$.

Récapitulatif : Modes de convergence dans $\mathcal{FO}(\tilde\mu)$ avec $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}^n)^+}$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F} \;\Rightarrow\; \forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})} \quad h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h \circ \mathrm{F}\,.$$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F} \;\Rightarrow\; \forall\, h \in \boxed{\mathcal{C}_B(\mathrm{I\!R})} \quad h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,\times} h \circ \mathrm{F}\,.$$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F} \;\Rightarrow\; \forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R})} \quad h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,1} h \circ \mathrm{F}\,.$$

$$\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \mathrm{F} \;\Rightarrow\; \forall\, h \in \boxed{\mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R})} \quad h \circ \mathrm{F}_n \xrightarrow{\tilde\mu,\times} h \circ \mathrm{F}\,.$$

Si $\boxed{\tilde\mu \in \mathcal{P}(\mathrm{I\!R}^n)}$ on a par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \Rightarrow & \mathsf{Loi} \\ \Downarrow & & \Downarrow\uparrow \\ \mathrm{ms} & \Rightarrow & \mathrm{loi} \end{array}}$$

§ 3. Composée d'une $\tilde\mu$-fonctionnelle F et d'une $\tilde\mu_{\mathrm{F}}$-fonctionnelle

Nous étendons la notation $\mathrm{h} \circ \mathrm{F}$ pour $\mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$, et ensuite pour $\mathrm{h} \in \mathcal{FO}(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$.

3.1. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ on a $\boxed{\|\, h \circ \mathrm{F} \,\|_{\tilde\mu,1} = \|\, h \,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},1}}$.

Dém : $\|\, h \,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},1} = \tilde\mu_{\mathrm{F}}\big(|h|\big) = \tilde\mu\big(|h| \circ \mathrm{F}\big) = \tilde\mu\big(|h \circ \mathrm{F}|\big) = \|\, h \circ \mathrm{F} \,\|_{\tilde\mu,1}$.

3.2. Définition : $\boxed{\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})}$ on peut donc définir $\boxed{\mathrm{h} \circ \mathrm{F}}$ par densité.

3.3.* Théorème : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$ on a $\mathrm{h} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$ et $\boxed{\|\, \mathrm{h} \circ \mathrm{F} \,\|_{\tilde\mu,1} = \|\, \mathrm{h} \,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},1}}$.

3.4.* Corollaire : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$ $\boxed{\tilde\mu_{\mathrm{F}}(\mathrm{h}) = \tilde\mu\,(\mathrm{h} \circ \mathrm{F})}$.

3.5.* Théorème : L'application $\mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}}) \to \mathcal{L}^1(\tilde\mu)$: $\mathrm{h} \mapsto \mathrm{h} \circ \mathrm{F}$ est une isométrie de Riesz. En particulier on a $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde\mu_{\mathrm{F}})$ $\boxed{|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}| = |\mathrm{h}| \circ \mathrm{F}}$.

3.6. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ on a $\boxed{\|\, h \circ \mathrm{F} \,\|_{\tilde\mu,2} = \|\, h \,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},2}}$.

Dém : $\|\, h \,\|_{\tilde\mu_{\mathrm{F}},2} = \tilde\mu_{\mathrm{F}}\big(h^2\big) = \tilde\mu\big[(h^2) \circ \mathrm{F}\big] = \tilde\mu\big[(h \circ \mathrm{F})^2\big] = \|\, h \circ \mathrm{F} \,\|_{\tilde\mu,2}$.

3.7.* Corollaire : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\mathrm{h} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ et $\boxed{\|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},2} = \|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},2}}$.

3.8.* Corollaire : L'application $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}) \to \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$: $\mathrm{h} \mapsto \mathrm{h} \circ \mathrm{F}$ est une isométrie de Riesz. De plus $\forall\, \mathrm{g}, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\boxed{(\mathrm{g}\,\mathrm{h}) \circ \mathrm{F} = (\mathrm{g} \circ \mathrm{F})\,(\mathrm{h} \circ \mathrm{F})}$.

3.9. Théorème : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\mathrm{h} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ et $\boxed{\|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} = \|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},\mathrm{B}}}$.

Dém : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $|\mathrm{h}| \leq \|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},\mathrm{B}}$, donc $|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}| = |\mathrm{h}| \circ \mathrm{F}$ $\leq \|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},\mathrm{B}} \circ \mathrm{F} = \|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},\mathrm{B}}$, donc $\mathrm{h} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ et $\|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} \leq \|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},\mathrm{B}}$.
D'autre part $\forall\, k \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ on a $\big|(\mathrm{h}\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})\,(k)\big| = \big|\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\,(\mathrm{h}\,k)\big| = \big|\tilde{\mu}\,[(\mathrm{h} \circ \mathrm{F})\,(k \circ \mathrm{F})]\big|$ $\leq \|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} \,.\, \tilde{\mu}\big(|k \circ \mathrm{F}|\big) = \|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}} \,.\, \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\big(|k|\big)$, donc $\|\mathrm{h}\|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},\mathrm{B}} \leq \|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}\|_{\tilde{\mu},\mathrm{B}}$.

3.10.* Corollaire : L'application $\mathcal{B}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}) \to \mathcal{B}(\tilde{\mu})$: $\mathrm{h} \mapsto \mathrm{h}\circ\mathrm{F}$ est un algébromorphisme et une isométrie de Riesz.

3.11.* Corollaire : $\sigma \in \mathcal{K}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}) \Rightarrow \sigma \circ \mathrm{F} \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$.

Notation : On pose $\forall\, \sigma \in \mathcal{K}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ $\boxed{\{\mathrm{F} \in \sigma\} = \sigma \circ \mathrm{F}} \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$.

3.12. Théorème : $\forall\, \mathrm{h} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\boxed{\mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{h} \circ \mathrm{F}) = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{h}) \circ \mathrm{F}}$.

Dém :

$$\mathbb{1} \wedge \big[n\,.\,|\mathrm{h} \circ \mathrm{F}|\big] = \mathbb{1} \wedge \big[n\,.\big(|\mathrm{h}| \circ \mathrm{F}\big)\big] = \mathbb{1} \wedge \big[\big(n\,.\,|\mathrm{h}|\big) \circ \mathrm{F}\big] = (\mathbb{1} \circ \mathrm{F}) \wedge \big[\big(n\,.\,|\mathrm{h}|\big) \circ \mathrm{F}\big]$$
$$= \big[\mathbb{1} \wedge \big(n\,.\,|\mathrm{h}|\big)\big] \circ \mathrm{F} \;;\; \text{donc } \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{h}\circ\mathrm{F}) = {}^1\!\lim_n\, \mathbb{1} \wedge \big[n\,.\,|\mathrm{h}\circ\mathrm{F}|\big] = {}^1\!\lim_n\, \big[\mathbb{1} \wedge \big(n\,.\,|\mathrm{h}|\big)\big] \circ \mathrm{F}$$
$$= \big[{}^1\!\lim_n\, \mathbb{1} \wedge \big(n\,.\,|\mathrm{h}|\big)\big] \circ \mathrm{F} = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{h}) \circ \mathrm{F}.$$

3.13. Définition : $\boxed{\forall\, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})}$ on peut donc définir $\boxed{\mathrm{H} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})}$ par densité de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ dans $\mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ pour la convergence plate ou exacte.

3.14.* Théorème :

$\forall\, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\mathrm{H} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$ et $\boxed{\mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{H} \circ \mathrm{F}) = \mathrm{S}_{\tilde{\mu}}\,(\mathrm{H}) \circ \mathrm{F}}$.

3.15. Corollaire : L'application $\boxed{\mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}) \to \mathcal{FO}(\tilde{\mu}) \ : \ \mathrm{H} \mapsto \mathrm{H} \circ \mathrm{F}}$ est un algébromorphisme injectif de Riesz.

Dém : Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ tel que $\mathrm{H} \circ \mathrm{F} = 0$; soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \{ |\mathrm{H}| \leq n \}$; on a $0 = (\sigma_n \circ \mathrm{F})(\mathrm{H} \circ \mathrm{F}) = (\sigma_n \mathrm{H}) \circ \mathrm{F}$, or $|\sigma_n \mathrm{H}| \leq n$, donc $\sigma_n \mathrm{H} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$; on peut donc écrire $0 = \| (\sigma_n \mathrm{H}) \circ \mathrm{F} \|_{\tilde{\mu},1} = \| \sigma_n \mathrm{H} \|_{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}},1}$, donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \mathrm{H} = 0$, or $\sigma_n \mathrm{H} \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{H}$, donc $\mathrm{H} = 0$.

3.16.* Théorème : $\forall \mathrm{H}_n, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ on a $\big(\mathrm{H}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{H}\big) \Leftrightarrow \big(\mathrm{H}_n \circ \mathrm{F} \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{H} \circ \mathrm{F}\big)$ (idem pour p.p., A, E).

§ 4. Généralisation aux $\tilde{\mu}$-polyfonctionnelles

Soit $p \in \mathbb{N}^*$; on généralise les notions de ce chapitre en se donnant p $\tilde{\mu}$–fonctionnelles

$$\boxed{\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})}$$

et en considérant la $\tilde{\mu}$–polyfonctionnelle $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p)$ "à valeurs dans $\mathbb{R}^p$".

1. Définition :

Soient $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_p$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $\mathrm{K} = \mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2 \times \ldots \times \mathrm{I}_p \subset \mathbb{R}^p$; alors $\mathbb{1}_{\mathrm{K}} \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}^p)$ et on pose $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{K}} \circ \mathrm{F} = \{\mathrm{F} \in \mathrm{K}\} = \{\mathrm{F}_1 \in \mathrm{I}_1\}\{\mathrm{F}_2 \in \mathrm{I}_2\} \ldots \{\mathrm{F}_p \in \mathrm{I}_p\}}$.

On étend la notation $h \circ \mathrm{F}$ à tout $h \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^p)$ comme au Chapitre XVII § 10.

2. Définition :

On pose $\forall h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(h) = \tilde{\mu}(h \circ \mathrm{F})}$. $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$ est l'IMAGE de $\tilde{\mu}$ par F.

3.* Théorème : $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R}^p)^+}$ et $\boxed{\| \tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \|_\star = \| \tilde{\mu} \|_\star}$.

4.* Théorème : Si $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, alors $\boxed{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)}$ et $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}$ s'appelle la LOI CONJOINTE de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ relativement à $\tilde{\mu}$.

On peut étendre la notation $\mathrm{H} \circ \mathrm{F}$ à tout $\mathrm{H} \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})$ comme au § 3.

CHAPITRE XIX

CONDITIONNEMENT D'UNE $\tilde{\mu}$-FONCTIONNELLE SOMMABLE

On suppose maintenant que $\boxed{\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, c-à-d que $\tilde{\mu}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^n$.

On se donne $\boxed{\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})}$ et la $\tilde{\mu}$–polyfonctionnelle $\boxed{\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1 , \mathrm{F}_2 , \ldots , \mathrm{F}_p)}$ avec $\mathrm{F}_1 , \mathrm{F}_2 , \ldots , \mathrm{F}_p \in \mathcal{FO}(\tilde{\mu})$.

On définit alors l'*espérance conditionnelle de* g *sachant* F, ainsi que le *conditionné de* g *par rapport* à F, dont nous développons les principales propriétés.

1. Définition : Soit $\sigma \in \mathcal{K}(\tilde{\mu})$ tel que $\sigma \neq 0$; on définit le réel

$$\boxed{\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\sigma\big) = \frac{1}{\tilde{\mu}\,(\sigma)} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma\,\mathrm{g}\,\tilde{\mu}} \,.$$

$\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\sigma\big)$ s'appelle l' $\boxed{\text{espérance conditionnelle de g sachant } \sigma}$.

2. Définition :

On pose $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ $\boxed{\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\,(h) = \big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)\,(h \circ \mathrm{F}) = \tilde{\mu}\,\big[\,g.(h \circ \mathrm{F})\big]}$.

C'est l'analogue de la Définition XVIII.1.1, mais appliquée à la mesure $g\,\tilde{\mu}$ (qui n'est plus nécessairement positive).

3.* Théorème : On a $\boxed{\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^p)}$ et $\boxed{\big\|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\big\|_\star \leq \|\,\mathrm{g}\,\|_{\tilde{\mu},1} = \|\,\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\,\|_\star}$.

4. Théorème : $\boxed{\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}} \in [\,\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}}\,]}$, c-à-d $\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}$ est une mesure de base $\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$.

Dém :

1) Supposons d'abord $\mathrm{g} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$; alors on a $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^p)$

$\big|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\,(h)\big| = \big|\,\tilde{\mu}\,\big[\,g\,.\,(h \circ \mathrm{F})\big]\big| \leq \|g\|\;\tilde{\mu}\,\big(|\,h \circ \mathrm{F}\,|\big) = \|g\|\;\tilde{\mu}\,\big(|h| \circ \mathrm{F}\big)$

$= \|g\|\;\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}}\,\big(|h|\big)$; donc $\big|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\big| \leq \|g\|\;\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}}$, donc $\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}} \in [\,\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}}\,]$,

car $[\,\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}}\,]$ est un sous-espace intégral de $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^p)$.

2) Supposons maintenant $\mathrm{g} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$; soit une suite $g_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^n)$ telle que $g_n \xrightarrow{\tilde{\mu},1} \mathrm{g}$; alors on a $\big\|\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}} - \big(\mathrm{g}_n\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\big\|_\star = \big\|\big[(\mathrm{g}_n - \mathrm{g})\,\tilde{\mu}\big]_{\mathrm{F}}\big\|_\star \leq \|\,\mathrm{g} - g_n\,\|_{\tilde{\mu},1}$, donc $\big(\mathrm{g}_n\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}} \xrightarrow{\star} \big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}} \in [\,\tilde{\mu}_{\,\mathrm{F}}\,]$.

5. <u>Définition</u> :

On peut donc poser $\boxed{(\mathrm{g}\,\tilde{\mu})_{\mathrm{F}} = \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}}$ avec $\boxed{\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big) \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_{\mathrm{F}})}$.

$\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)$ s'appelle l' $\boxed{\text{espérance conditionnelle de g sachant F}}$.

6. <u>Lemme</u> : $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\boxed{\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)\,(h\circ \mathrm{F}) = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\big[\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\,h\big]}$.

<u>Dém</u> : $\big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)\,(h\circ \mathrm{F}) = \big(\mathrm{g}\,\tilde{\mu}\big)_{\mathrm{F}}\,(h) = \big[\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\big]\,(h) = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}\big[\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\,h\big]$.

<u>*Exemple fondamental*</u> : Prenons $p = 1$ et soit A une partie élémentaire de $\mathbb{R}$; la formule ci-dessus appliquée à $h = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ donne alors

$$\int_{\mathrm{A}} \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} = \int_{\mathbb{R}^n} \big\{\mathrm{F}\in\mathrm{A}\big\}\,\mathrm{g}\,\tilde{\mu}$$
$$= \tilde{\mu}\big[\big\{\mathrm{F}\in\mathrm{A}\big\}\big]\ \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\big\{\mathrm{F}\in\mathrm{A}\big\}\big) = \tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})\ \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\big\{\mathrm{F}\in\mathrm{A}\big\}\big)\ ;$$

si $\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) \neq 0$ on en déduit $\boxed{\dfrac{1}{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})}\displaystyle\int_{\mathrm{A}} \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\,\tilde{\mu}_{\mathrm{F}} = \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\big\{\mathrm{F}\in\mathrm{A}\big\}\big)}$.

On peut donc interpréter la “valeur” de $\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ comme la “limite” de $\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\big\{\mathrm{F}\in\mathrm{A}\big\}\big)$ quand A “se réduit” au singleton $\big\{\alpha\big\}$, et écrire abusivement $\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)(\alpha) = \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\big\{\mathrm{F}=\alpha\big\}\big)$, ce qui motive la notation $\mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)$.

7. <u>Définition</u> : On pose $\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big) = \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)\circ\mathrm{F}} \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

$\widehat{\mathsf{E}}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)$ s'appelle la $\boxed{\text{conditionnée de g par rapport à F}}$.

On peut écrire symboliquement $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \ \widehat{\mathsf{E}}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)(x) = \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\big\{\mathrm{F}=\mathrm{F}(x)\big\}\big)$,

c-à-d $\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big)(x) = \mathsf{E}\big(\mathrm{g}\,|\,\widehat{x}\big)}$, avec $\widehat{x} = \big\{\,y\in\mathbb{R}^n \,\|\, \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(x)\big\}$.

$\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\big(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F}\big) \text{ est la } \textit{composée à gauche} \text{ de F qui approche “au mieux” g.}}$

<u>Schéma fonctionnel</u> :

$$\begin{tikzcd}
\overset{\tilde{\mu}}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "\mathrm{F}"] \arrow[d, shift right, "\widehat{\mathsf{E}}(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F})"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{g}"] & \overset{\tilde{\mu}_{\mathrm{F}}}{\mathbb{R}^p} \arrow[dl, "\mathsf{E}(\mathrm{g}\,|\,\mathrm{F})"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

8.* Théorème : $\boxed{g \geq 0 \ \Rightarrow \Big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \geq 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \geq 0\Big]}$.

9. Théorème : $\boxed{\big|(g\,\tilde{\mu})_F\big| \leq \big(|g|\,\tilde{\mu}\big)_F}$, donc $\boxed{\big|\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\big| \leq \mathsf{E}\big(|g| \,|\, F\big)}$,

donc $\boxed{\big|\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\big| \leq \widehat{\mathsf{E}}\big(|g| \,|\, F\big)}$.

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p) \quad \big|(g\,\tilde{\mu})_F\,(h)\big| = \big|\big(g\,\tilde{\mu}\big)\,(h \circ F)\big| \leq \big(|g|\,\tilde{\mu}\big)\,\big(|h \circ F|\big)$
$= \big(|g|\,\tilde{\mu}\big)_F\,\big(|h|\big)$; donc $\big|(g\,\tilde{\mu})_F\big| \leq \big(|g|\,\tilde{\mu}\big)_F$.

10. Théorème :

$$\boxed{\tilde{\mu}\,\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\big] = \tilde{\mu}\,(g)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\big\|\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\big\|_{\tilde{\mu},1} = \big\|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\big\|_{\tilde{\mu}_F,1} \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},1}}.$$

Dém :

1) $\tilde{\mu}\,\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\big] = \tilde{\mu}\,\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \circ F\big] = \tilde{\mu}_F\,\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\big] = \big(g\,\tilde{\mu}\big)_F\,(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}\,(g)$.

2) $\big\|\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\big\|_{\tilde{\mu},1} = \tilde{\mu}\,\big[\,|\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)|\,\big] = \tilde{\mu}\,\big[|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)| \circ F\big] = \tilde{\mu}_F\,\big[|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)|\big]$
$= \big\|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\big\|_{\tilde{\mu}_F,1} = \big\|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde{\mu}_F\big\|_{\star} = \big\|\big(g\,\tilde{\mu}\big)_F\big\|_{\star} \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},1}$.

11.* Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{L}^1(\tilde{\mu}_F)$ on a $\boxed{\mathsf{E}\big(h \circ F \,|\, F\big) = h}$.

Dém : $\forall\, k \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\tilde{\mu}_F\big[\,\mathsf{E}\big(h \circ F \,|\, F\big)\,k\big] = [(h \circ F)\,\tilde{\mu}\,]\,(k \circ F)$
$= \tilde{\mu}\,[(h \circ F)\,(k \circ F)] = \tilde{\mu}\,[\,(h\,k) \circ F\,] = \tilde{\mu}_F\,(h\,k)$; donc $\mathsf{E}\big(h \circ F \,|\, F\big)\,.\,\tilde{\mu}_F = h\,.\,\tilde{\mu}_F$,
donc $\mathsf{E}\big(h \circ F \,|\, F\big) = h$.

12. Théorème : $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R}^p)$ on a $\boxed{\big(g\,\tilde{\mu}\big)\,(h \circ F) = \big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde{\mu}\,\big]\,(h \circ F)}$.

Dém : $\big(g\,\tilde{\mu}\big)\,(h \circ F) = \big(g\,\tilde{\mu}\big)_F\,(h) = \tilde{\mu}_F\,\big[\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,h\,\big] = \tilde{\mu}\,\Big[\big[\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,h\,\big] \circ F\Big]$
$= \tilde{\mu}\,\Big[\big[\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \circ F\,\big]\,.\,(h \circ F)\Big] = \tilde{\mu}\,\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,.\,(h \circ F)\,\big] = \big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde{\mu}\,\big]\,(h \circ F)$.

13.* Corollaire : $\boxed{\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde{\mu}\,\big]_F = \big(g\,\tilde{\mu}\big)_F}$, donc $\boxed{\mathsf{E}\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \,|\, F\,\big] = \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)}$

donc $\boxed{\widehat{\mathsf{E}}\big[\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \,|\, F\,\big] = \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)}$.

14.* Corollaire : $g \mapsto \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)$ est une projection croissante de norme 1 de $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$.

15. Théorème : $\forall\, g \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ on a $\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ et

$$\boxed{\|\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\|_{\tilde{\mu},2} = \big\|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\big\|_{\tilde{\mu}_F,2} \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},2}}\,.$$

Dém : On a $\forall\, h \in \mathcal{R}_B(\mathrm{I\!R}^p)$ $\tilde{\mu}_F\big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\, h\big] = \big[\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\,\tilde{\mu}_F\big](h) = \big(g\,\tilde{\mu}\big)_F(h)$

$= \tilde{\mu}\big[g\,.(h \circ F)\big] \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},2}\,\|\,h \circ F\,\|_{\tilde{\mu},2} = \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},2}\,\|\,h\,\|_{\tilde{\mu}_F,2}$;

donc $\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu}_F)$ et $\|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\|_{\tilde{\mu}_F,2} \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},2}$; donc

$\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) = \mathsf{E}\big(g \,|\, F\big) \circ F \in \mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$ et $\|\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\|_{\tilde{\mu},2} = \|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\|_{\tilde{\mu}_F,2} \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},2}$.

16.* Corollaire : $g \mapsto \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)$ est une projection orthogonale croissante de $\mathcal{L}^2(\tilde{\mu})$.

17.* Théorème : $\forall\, g \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ on a $\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big) \in \mathcal{B}(\tilde{\mu})$ et

$$\boxed{\|\,\widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)\|_{\tilde{\mu},B} = \big\|\,\mathsf{E}\big(g \,|\, F\big)\big\|_{\tilde{\mu}_F,B} \leq \|\,g\,\|_{\tilde{\mu},B}}\,.$$

18.* Corollaire : $g \mapsto \widehat{\mathsf{E}}\big(g \,|\, F\big)$ est une projection croissante de norme 1 de $\mathcal{B}(\tilde{\mu})$.