

**Intégration sur un rectangle compact de  $\mathbb{R}^2$**

**CHAPITRE XV**  
**FONCTIONS ET PSEUDO-MESURES**  
**SUR UN RECTANGLE COMPACT**

On généralise à grands traits pour deux dimensions les résultats obtenus sur  $[a,b]$ . Le *produit tensoriel* de deux pseudo-mesures unidimensionnelles constitue la principale nouveauté de ce chapitre, qui nous conduit à l'apothéose du théorème de Fubini.

**§ 1. Espaces fondamentaux**

I et J sont des intervalles compacts de longueur non nulle de  $\mathbb{R}$  ; on pose  $K = I \times J$ .

1.1. Définition : Une fonction étagée dans K est une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $\mathbb{1}_{I' \times J'}$ , où I' et J' sont des intervalles inclus respectivement à I et J, (éventuellement réduits à des singletons).

Notations :

$\mathcal{E}(K)$  = algèbre de Riesz des fonctions étagées :  $K \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(K)$  = algèbre de Riesz des fonctions continues :  $K \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{F}(K)$  = algèbre de Riesz des fonctions bornées :  $K \rightarrow \mathbb{R}$

1.2. Définition : On note  $\mathcal{R}(K)$  la fermeture de  $\mathcal{E}(K)$  dans  $\mathcal{F}(K)$  pour la convergence uniforme. Les fonctions de  $\mathcal{R}(K)$  sont appelées les fonctions régliées dans K.

1.3.\* Théorème : Soit  $f \in \mathcal{F}(K)$  ; alors  $f \in \mathcal{R}(K)$  ssi  $\forall (u, v) \in K$  les huit limites suivantes existent :

$\lim_{x \rightarrow u^+} f(x, v)$	$\lim_{x \rightarrow u^-} f(x, v)$	$\lim_{y \rightarrow v^+} f(u, y)$	$\lim_{y \rightarrow v^-} f(u, y)$
$\lim_{\substack{x \rightarrow u^+ \\ y \rightarrow v^+}} f(x, y)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow u^- \\ y \rightarrow v^+}} f(x, y)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow u^+ \\ y \rightarrow v^-}} f(x, y)$	$\lim_{\substack{x \rightarrow u^- \\ y \rightarrow v^-}} f(x, y)$

Si on trace un carré de centre  $P = (u, v)$  et de côtés parallèles aux axes, ainsi que ses deux médianes, les limites ci-dessus correspondent aux limites en  $P$  sur les quatre demi-médianes et aux limites en  $P$  dans les quatre carrés *ouverts* délimités par les médianes.

On définit  $\mathcal{PM}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{L}^1(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{L}^2(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{BA}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{PR}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{W}(\mathbb{K})$  comme sur  $[a, b]$ . Les définitions et théorèmes relatifs à ces espaces sont analogues au cas de  $[a, b]$ .

Notation intégrale :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{K}) \quad \forall g \in \mathcal{R}(\mathbb{K})$  on note

$$\tilde{f}(g) = \iint_{\mathbb{K}} g \tilde{f} = \iint_{\mathbb{K}} g(x, y) \tilde{f}(x, y).$$

$\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$  on écrit  $\iint_{\mathbb{K}} \tilde{f}(x, y) dx dy$  au lieu de  $\iint_{\mathbb{K}} \tilde{f}(x, y)$ ; on a donc

$$\iint_{\mathbb{K}} \tilde{f}(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{K}} \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(\mathbf{1}) \quad (\text{avec } \mathbf{1} = 1_{\mathbb{K}}).$$

1.4. Définition :  $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{K})$  est une mesure sur  $\mathbb{K}$  ssi

$$\forall u \in \mathbb{I} \quad \lim_{\alpha \rightarrow u^\pm} |\tilde{f}|(1_{]u, \alpha[ \times \mathbb{J}}) = 0 \quad \text{et} \quad \forall v \in \mathbb{J} \quad \lim_{\beta \rightarrow v^\pm} |\tilde{f}|(1_{\mathbb{I} \times ]v, \beta]) = 0.$$

Cette propriété s'appelle l'hypercontinuité des mesures; elle signifie que si, dans un rectangle *ouvert* de côtés parallèles aux axes, un côté tend vers le côté opposé, alors la mesure du rectangle tend vers 0.

On note  $\mathcal{M}(\mathbb{K})$  l'espace de Riesz des mesures sur  $\mathbb{K}$ .

La mesure  $\mathcal{E}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \iint_{\mathbb{K}} g(x, y) dx dy$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{K}$ .

1.5.\* Théorème :  $\mathcal{L}^1(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{PM}(\mathbb{K})$ .

1.6.\* Théorème :  $\mathcal{M}(\mathbb{K})$  est un sous-espace cohérent, intégral et fermé de  $\mathcal{PM}(\mathbb{K})$ .

1.7. Théorème de Lebesgue dans  $\mathcal{W}(\mathbb{K})$

Soit  $f \in \mathcal{W}(\mathbb{K})$  et soit une suite  $f_n \in \mathcal{W}(\mathbb{K})$  telle que  $f_n \xrightarrow{b} f$ ; alors  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$  on a  $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} f \tilde{\mu}$ ; en conséquence  $\tilde{\mu}(f_n) \rightarrow \tilde{\mu}(f)$

Dém : Même succession d'étapes que pour  $[a, b]$ .

### 1.8. Corollaire : Hypercontinuité généralisée

Soit une suite décroissante d'ouverts  $\Omega_n \subset K$  tels que  $\bigcap_n \Omega_n = \emptyset$  ; alors  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(K)$  on a  $\boxed{\tilde{\mu}(\mathbb{1}_{\Omega_n}) \rightarrow 0}$ .

Dém : On a  $\forall n \in \mathbb{N} \mathbb{1}_{\Omega_n} \in \mathcal{PR}(K)$  ; de plus on a clairement  $\mathbb{1}_{\Omega_n} \xrightarrow{b} 0$  ; il suffit dès lors d'appliquer le théorème de Lebesgue.

Remarque : Il n'existe pas de généralisation naturelle de la notion de mesure *diffuse* en dimension  $\geq 2$ .

## § 2. Produit tensoriel de fonctions

2.1. Définition :  $\forall f \in \mathcal{F}(I) \forall g \in \mathcal{F}(J)$  on note

$$\boxed{f \otimes g : K \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x)g(y)} ; \text{ on a donc } \boxed{f \otimes g \in \mathcal{F}(K)} .$$

2.2.\* Théorème :  $\boxed{|f \otimes g| = |f| \otimes |g|}$  et  $\boxed{\|f \otimes g\| = \|f\| \|g\|}$ .

2.3.\* Théorème : On a  $\forall f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(I) \forall g, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(J)$

1)  $f_1 \otimes g + f_2 \otimes g = (f_1 + f_2) \otimes g$

2)  $f \otimes g_1 + f \otimes g_2 = f \otimes (g_1 + g_2)$

3)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} (\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda(f \otimes g)$

4)  $(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2)$ .

Notation : Soient  $V$  un sous-espace de  $\mathcal{F}(I)$  et  $W$  un sous-espace de  $\mathcal{F}(J)$  ;

on note  $\boxed{V \otimes W}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(K)$  engendré par les éléments

de la forme  $f \otimes g$  avec  $f \in V$  et  $g \in W$  ; on peut donc écrire  $\boxed{\mathcal{F}(I) \otimes \mathcal{F}(J) \subset \mathcal{F}(K)}$ .

2.4.\* Théorème :  $\boxed{\mathcal{E}(I) \otimes \mathcal{E}(J) = \mathcal{E}(K)}$ .

Cette propriété, à contraster avec la suivante, fournit une raison supplémentaire de bâtir la théorie de l'intégration sur les fonctions étagées plutôt que sur les fonctions continues.

2.5.\* Théorème :  $\mathcal{C}(I) \otimes \mathcal{C}(J) \subset \mathcal{C}(K)$  et  $\mathcal{R}(I) \otimes \mathcal{R}(J) \subset \mathcal{R}(K)$ .

2.6.\* Théorème :  $\mathcal{BA}(I) \otimes \mathcal{BA}(J) \subset \mathcal{BA}(K)$  et  $\mathcal{PR}(I) \otimes \mathcal{PR}(J) \subset \mathcal{PR}(K)$ .

### § 3. Pseudo-mesures marginales

3.1. Définition :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{K})$  on pose

$$\int_{\mathbb{J}} \tilde{f} : \mathcal{E}(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto \tilde{f}(h \otimes 1_{\mathbb{J}}) = \iint_{\mathbb{K}} h(x) \tilde{f}(x, y)$$

et  $\int_{\mathbb{I}} \tilde{f} : \mathcal{E}(\mathbb{J}) \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto \tilde{f}(1_{\mathbb{I}} \otimes h) = \iint_{\mathbb{K}} h(y) \tilde{f}(x, y).$

3.2. Théorème :

$$\int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{I}) \text{ et } \int_{\mathbb{I}} \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{J}) ; \text{ de plus } \left\| \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \right\|_{\star} \leq \|\tilde{f}\|_{\star} \text{ et } \left\| \int_{\mathbb{I}} \tilde{f} \right\|_{\star} \leq \|\tilde{f}\|_{\star}.$$

Dém :

$$\text{On a } \forall h \in \mathcal{E}(\mathbb{I}) \quad \left| \left( \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \right) (h) \right| = |\tilde{f}(h \otimes 1_{\mathbb{J}})| \leq \|\tilde{f}\|_{\star} \| |h| \otimes 1_{\mathbb{J}} \| = \|\tilde{f}\|_{\star} \|h\|.$$

$\int_{\mathbb{J}} \tilde{f}$  et  $\int_{\mathbb{I}} \tilde{f}$  s'appellent les pseudo-mesures marginales de  $\tilde{f}$ , respectivement sur  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{J}$ .

3.3. Corollaire :

Soient  $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{K})$  tels que  $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$  ; alors  $\int_{\mathbb{J}} \tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \int_{\mathbb{J}} \tilde{f}$  et  $\int_{\mathbb{I}} \tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \int_{\mathbb{I}} \tilde{f}$ .

3.4. Lemme :

$$\forall h \in \mathcal{E}(\mathbb{I})^+ \quad \left| \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \right| (h) \leq |\tilde{f}|(h \otimes 1_{\mathbb{J}}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathcal{E}(\mathbb{J})^+ \quad \left| \int_{\mathbb{I}} \tilde{f} \right| (k) \leq |\tilde{f}|(1_{\mathbb{I}} \otimes k).$$

$$\begin{aligned} \text{Dém} : \left| \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \right| (h) &= \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}(\mathbb{I}) \\ |k| \leq h}} \left| \left( \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \right) (k) \right| = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}(\mathbb{I}) \\ |k| \leq h}} |\tilde{f}(k \otimes 1_{\mathbb{J}})| \\ &\leq \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}(\mathbb{I}) \\ |k| \leq h}} |\tilde{f}|(|k| \otimes 1_{\mathbb{J}}) = |\tilde{f}|(h \otimes 1_{\mathbb{J}}). \end{aligned}$$

$$3.5. \text{ Théorème : } \boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \Rightarrow \left[ \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{I}) \text{ et } \int_{\mathbb{I}} \tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{J}) \right]}.$$

Dém : On a  $\forall u \in \mathbb{I}$

$$\left| \int_{\mathbb{J}} \tilde{f} \right| (1_{]u, \alpha[}) \leq |\tilde{f}|(1_{]u, \alpha[} \otimes 1_{\mathbb{J}}) = |\tilde{f}|(1_{]u, \alpha[ \times \mathbb{J}}) \rightarrow 0 \text{ quand } \alpha \rightarrow u^{\pm}.$$

Notation : Si  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$  on notera les mesures marginales  $\int_{\mathbb{J}} \tilde{f} dy$  et  $\int_{\mathbb{I}} \tilde{f} dx$  ; compte tenu du théorème suivant nous les appellerons fonctionnelles marginales, respectivement sur  $\mathbb{I}$  et  $\mathbb{J}$ .

3.6. Théorème :  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(K) \Rightarrow \left[ \int_J \tilde{f} dy \in \mathcal{L}^1(I) \text{ et } \int_I \tilde{f} dx \in \mathcal{L}^1(J) \right]$ .

Dém : Il existe une suite  $f_n \in \mathcal{E}(K)$  et une suite  $\varepsilon_n > 0$  telles que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$

et telles que  $\forall g \in \mathcal{E}(K) \quad \left| \tilde{f}(g) - \iint_K f_n(x, y) g(x, y) dx dy \right| \leq \varepsilon_n \|g\|$  ;

donc  $\forall h \in \mathcal{E}(I) \quad \left| \tilde{f}(h \otimes 1_J) - \iint_K f_n(x, y) h(x) dx dy \right| \leq \varepsilon_n \|h \otimes 1_J\|$ ,

c-à-d  $\left| \left( \int_J \tilde{f} dy \right)(h) - \int_I \left[ \int_J f_n(x, y) dy \right] h(x) dx \right| \leq \varepsilon_n \|h\|$  ;

or  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_J f_n dy \in \mathcal{E}(I)$ , donc  $\int_J \tilde{f} dy \in \mathcal{L}^1(I)$ .

3.7. Théorème :  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(K) \Rightarrow \left[ \int_J \tilde{f} dy \in \mathcal{L}^2(I) \text{ et } \int_I \tilde{f} dx \in \mathcal{L}^2(J) \right]$  ;

de plus  $\left\| \int_J \tilde{f} dy \right\|_2 \leq |J|^{1/2} \|\tilde{f}\|_2$  et  $\left\| \int_I \tilde{f} dx \right\|_2 \leq |I|^{1/2} \|\tilde{f}\|_2$ .

Dém : On a  $\forall h \in \mathcal{E}(I) \quad \left| \left( \int_J \tilde{f} \right)(h) \right| = |\tilde{f}(h \otimes 1_J)| \leq \|\tilde{f}\|_2 \|h \otimes 1_J\|_2$

$= \|\tilde{f}\|_2 |J|^{1/2} \|h\|_2$  ; donc  $\int_J \tilde{f} dy \in \mathcal{L}^2(I)$  et  $\left\| \int_J \tilde{f} dy \right\|_2 \leq |J|^{1/2} \|\tilde{f}\|_2$ .

3.8. Théorème :  $\tilde{f} \in \mathcal{B}(K) \Rightarrow \left[ \int_J \tilde{f} dy \in \mathcal{B}(I) \text{ et } \int_I \tilde{f} dx \in \mathcal{B}(J) \right]$  ;

de plus  $\left\| \int_J \tilde{f} dy \right\|_B \leq |J| \|\tilde{f}\|_B$  et  $\left\| \int_I \tilde{f} dx \right\|_B \leq |I| \|\tilde{f}\|_B$ .

Dém : On a  $\forall h \in \mathcal{E}(I) \quad \left| \left( \int_J \tilde{f} \right)(h) \right| = |\tilde{f}(h \otimes 1_J)| \leq \|\tilde{f}\|_B \|h \otimes 1_J\|_1$

$= b \|\tilde{f}\|_B |J| \|h\|_1$  ; donc  $\int_J \tilde{f} dy \in \mathcal{B}(I)$  et  $\left\| \int_J \tilde{f} dy \right\|_B \leq |J| \|\tilde{f}\|_B$ .

3.9. Théorème :  $\mathcal{W}(I) \otimes \mathcal{W}(J) \subset \mathcal{W}(K)$ .

Dém :

Soient  $f_1 \in \mathcal{W}(I)^+$  et  $f_2 \in \mathcal{W}(J)^+$  ; soit  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f_1 \leq M$  et  $f_2 \leq M$  ;

soient  $\varepsilon > 0$  et  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(K)^+$  ; soient  $g_1, h_1 \in \mathcal{PR}(I)$  tels que  $0 \leq g_1 \leq f_1 \leq h_1 \leq M$

et  $\left( \int_J \tilde{\mu} \right)(h_1 - g_1) \leq \varepsilon$  ; de même soient  $g_2, h_2 \in \mathcal{PR}(J)$  tels que

$0 \leq g_2 \leq f_2 \leq h_2 \leq M$  et  $\left( \int_I \tilde{\mu} \right)(h_2 - g_2) \leq \varepsilon$  ; alors on a

$g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{PR}(K)$ ,  $h_1 \otimes h_2 \in \mathcal{PR}(K)$  et  $g_1 \otimes g_2 \leq f_1 \otimes f_2 \leq h_1 \otimes h_2$  ;

de plus on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(h_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes g_2) &= \tilde{\mu}(h_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes h_2 + g_1 \otimes h_2 - g_1 \otimes g_2) \\ &= \tilde{\mu}[(h_1 - g_1) \otimes h_2 + g_1 \otimes (h_2 - g_2)] \leq \tilde{\mu}[(h_1 - g_1) \otimes M + M \otimes (h_2 - g_2)] \\ &\leq M \left[ \left( \int_J \tilde{\mu} \right) (h_1 - g_1) + \left( \int_I \tilde{\mu} \right) (h_2 - g_2) \right] \leq 2 \varepsilon M ; \text{ donc } f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Le cas général s'obtient en raisonnant sur les parties positives et négatives de  $f_1$  et  $f_2$ .

#### § 4. Produit tensoriel de pseudo-mesures

4.1. Définition : On pose  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(I) \quad \forall \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(J) \quad \forall f \in \mathcal{E}(I) \quad \forall g \in \mathcal{E}(J)$

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f \otimes g) = \tilde{\mu}(f) \tilde{\nu}(g)}.$$

Comme  $\mathcal{E}(I) \otimes \mathcal{E}(J) = \mathcal{E}(K)$ , cette relation permet par linéarité de faire agir  $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$  sur  $\mathcal{E}(K)$ ; on en conclut immédiatement que l'on a  $\boxed{\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(K)}$ .

Notation : Soient  $V$  un sous-espace de  $\mathcal{PM}(I)$  et  $W$  un sous-espace de  $\mathcal{PM}(J)$ ; on note  $\boxed{V \otimes W}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{PM}(K)$  engendré par les éléments de la forme  $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$  avec  $\tilde{\mu} \in V$  et  $\tilde{\nu} \in W$ .

On peut donc écrire  $\boxed{\mathcal{PM}(I) \otimes \mathcal{PM}(J) \subset \mathcal{PM}(K)}$ .

4.2. \* Théorème : On a  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \mathcal{PM}(I) \quad \forall \tilde{\nu}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 \in \mathcal{PM}(J)$

- 1)  $\tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu} + \tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu} = (\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2) \otimes \tilde{\nu}$
- 2)  $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}_1 + \tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}_2 = \tilde{\mu} \otimes (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)$
- 3)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \tilde{\mu}) \otimes \tilde{\nu} = \lambda \otimes \tilde{\nu} = \lambda (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})$ .

4.3. \* Théorème :  $\forall \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \mathcal{PM}(I)^+ \quad \forall \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 \in \mathcal{PM}(J)^+ \quad \text{on a}$

$$\boxed{(\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \quad \text{et} \quad \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\nu}_2) \Rightarrow \tilde{\mu}_1 \otimes \tilde{\nu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \otimes \tilde{\nu}_2}.$$

4.4. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}(I) \quad \forall \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(J) \quad \text{on a}$

$$\boxed{|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}| \quad \text{et} \quad \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_* = \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*}.$$

Dém : Toute fonction  $h \in \mathcal{E}(\mathbf{K})$  peut s'écrire  $h = \sum_{ij} \alpha_{ij} p_i q_j$  où  $p_i$  est la fonction caractéristique d'un intervalle  $\subset \mathbf{I}$  et où  $q_j$  est la fonction caractéristique d'un intervalle  $\subset \mathbf{J}$  ; on peut supposer de plus  $\forall i \neq j \quad p_i p_j = 0$  et  $q_i q_j = 0$  ; on a dès lors :

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathcal{E}(\mathbf{K}) \quad |(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h)| &= |(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})\left(\sum_{ij} \alpha_{ij} p_i q_j\right)| = \left|\sum_{ij} \alpha_{ij} \tilde{\mu}(p_i) \tilde{\nu}(q_j)\right| \\ &\leq \sum_{ij} |\alpha_{ij}| |\tilde{\mu}(p_i)| |\tilde{\nu}(q_j)| \leq \sum_{ij} |\alpha_{ij}| |\tilde{\mu}|(p_i) |\tilde{\nu}|(q_j) = (|\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|)(|h|) ; \end{aligned}$$

on en déduit  $|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| \leq |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|$ .

Par ailleurs soit  $\varepsilon > 0$  ; soit  $p \in \mathcal{E}(\mathbf{I})$  tel que  $\|p\| \leq 1$  et  $\|\tilde{\mu}\|_* \leq \tilde{\mu}(p) + \varepsilon$  ; de même soit  $q \in \mathcal{E}(\mathbf{J})$  tel que  $\|q\| \leq 1$  et  $\|\tilde{\nu}\|_* \leq \tilde{\nu}(q) + \varepsilon$  ; on a  $\|p q\| \leq 1$ , donc  $\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_* \geq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(p \otimes q) = \tilde{\mu}(p) \tilde{\nu}(q) \geq (\|\tilde{\mu}\|_* - \varepsilon)(\|\tilde{\nu}\|_* - \varepsilon) \geq \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_* - \varepsilon(\|\tilde{\mu}\|_* + \|\tilde{\nu}\|_*)$  ; comme  $\varepsilon$  est arbitraire on obtient

$$\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_* \geq \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*.$$

Posons  $\tilde{\chi} = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}| - |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| \in \mathcal{PM}(\mathbf{K})^+$  ; on a donc  $\|\tilde{\chi}\|_* = \tilde{\chi}(\mathbf{1}_\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}_\mathbf{J}) = (|\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|)(\mathbf{1}_\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}_\mathbf{J}) - |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}|(\mathbf{1}_\mathbf{I} \otimes \mathbf{1}_\mathbf{J}) = |\tilde{\mu}|(\mathbf{1}_\mathbf{I}) |\tilde{\nu}|(\mathbf{1}_\mathbf{J}) - \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_* = \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_* - \|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_* \leq 0$  ; donc  $\|\tilde{\chi}\|_* = 0$ , c-à-d  $\|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}\|_* = \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*$ , et donc aussi  $\tilde{\chi} = 0$ , c-à-d  $|\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}| = |\tilde{\mu}| \otimes |\tilde{\nu}|$ .

4.5. Théorème :  $\boxed{\mathcal{M}(\mathbf{I}) \otimes \mathcal{M}(\mathbf{J}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{K})}$ .

Dém : On a  $\forall u \in \mathbf{I} \quad \lim_{\alpha \rightarrow u^\pm} |\tilde{f} \otimes \tilde{g}|(1_{]u, \alpha[ \times \mathbf{J}}) = \lim_{\alpha \rightarrow u^\pm} (|\tilde{f}| \otimes |\tilde{g}|)(1_{]u, \alpha[} \otimes \mathbf{1}_\mathbf{J}) = \lim_{\alpha \rightarrow u^\pm} |\tilde{f}|(1_{]u, \alpha[}) |\tilde{g}|(\mathbf{1}_\mathbf{J}) = 0$ .

4.6. Théorème :  $\boxed{\mathcal{L}^1(\mathbf{I}) \otimes \mathcal{L}^1(\mathbf{J}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{K})}$  et  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{I}) \quad \forall \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{J})$  on a

$$\boxed{\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_1 = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1}.$$

Dém : Soit  $f_n \in \mathcal{E}(\mathbf{I})$  tel que  $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$  et  $g_n \in \mathcal{E}(\mathbf{J})$  tel que  $g_n \xrightarrow{1} \tilde{g}$  ; alors on a  $\forall n \in \mathbf{N} \quad \|\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n - \tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_* = \|\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n - \tilde{f}_n \otimes \tilde{g} + \tilde{f}_n \otimes \tilde{g} - \tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_* \leq \|\tilde{f}_n \otimes (\tilde{g}_n - \tilde{g})\|_* + \|(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \otimes \tilde{g}\|_* = \|\tilde{f}_n\|_1 \|\tilde{g}_n - \tilde{g}\|_1 + \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1$  ; donc  $\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \otimes \tilde{g}$  et  $\tilde{f} \otimes \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{K})$ .

4.7. Théorème :  $\boxed{\mathcal{L}^2(\mathbf{I}) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbf{J}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbf{K})}$  et  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbf{I}) \quad \forall \tilde{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbf{J})$  on a

$$\boxed{\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_2 = \|\tilde{f}\|_2 \|\tilde{g}\|_2}.$$

Dém : Soit  $f_n \in \mathcal{E}(I)$  tel que  $f_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$  et  $g_n \in \mathcal{E}(J)$  tel que  $g_n \xrightarrow{2} \tilde{g}$  ;

on sait déjà que  $\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \otimes \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(K)$  ; de plus on a  $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{f}_m \otimes \tilde{g}_m - \tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n\|_2 = \|\tilde{f}_m \otimes \tilde{g}_m - \tilde{f}_m \otimes \tilde{g}_n + \tilde{f}_m \otimes \tilde{g}_n - \tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n\|_2 \\ & \leq \|\tilde{f}_m \otimes (\tilde{g}_m - \tilde{g}_n)\|_2 + \|(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n) \otimes \tilde{g}_n\|_2 = \|\tilde{f}_m^2 \otimes (\tilde{g}_m - \tilde{g}_n)^2\|_1 + \|(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)^2 \otimes \tilde{g}_n^2\|_1 \\ & = \|\tilde{f}_m^2\|_1 \|(\tilde{g}_m - \tilde{g}_n)^2\|_1 + \|(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)^2\|_1 \|\tilde{g}_n^2\|_1 \\ & = \|\tilde{f}_m\|_2^2 \|\tilde{g}_m - \tilde{g}_n\|_2^2 + \|\tilde{f}_m - \tilde{f}_n\|_2^2 \|\tilde{g}_n\|_2^2 ; \end{aligned}$$

donc  $\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}^2(K)$ , donc  $\tilde{f}_n \otimes \tilde{g}_n \xrightarrow{2} \tilde{f} \otimes \tilde{g} \in \mathcal{L}^2(K)$  ;

par ailleurs on a  $\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_2 = \|\tilde{f}^2 \otimes \tilde{g}^2\|_1 = \|\tilde{f}^2\|_1 \|\tilde{g}^2\|_1 = \|\tilde{f}\|_2 \|\tilde{g}\|_2$ .

4.8. \* Théorème :  $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2(I) \quad \forall \tilde{h}, \tilde{k} \in \mathcal{L}^2(J)$  on a

$$\boxed{(\tilde{f} \otimes \tilde{g})(\tilde{h} \otimes \tilde{k}) = (\tilde{f}\tilde{h}) \otimes (\tilde{g}\tilde{k})}.$$

4.9. Théorème :  $\boxed{\mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{B}(J) \subset \mathcal{B}(K)}$  et  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{B}(I) \quad \forall \tilde{g} \in \mathcal{B}(J)$  on a

$$\boxed{\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_{\mathcal{B}} = \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}}}$$

Dém : On a  $|\tilde{f}| \leq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}}$  et  $|\tilde{g}| \leq \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}}$ , donc  $|\tilde{f} \otimes \tilde{g}| = |\tilde{f}| \otimes |\tilde{g}| \leq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} \otimes \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}}$ , donc  $\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_{\mathcal{B}} \leq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}}$  ; par ailleurs soit  $\varepsilon > 0$  ; soit  $p \in \mathcal{E}(I)$  tel que  $\|p\|_1 \leq 1$  et  $\tilde{f}(p) \geq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} - \varepsilon$  ; de même soit  $q \in \mathcal{E}(J)$  tel que  $\|q\|_1 \leq 1$  et  $\tilde{f}(q) \geq \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}} - \varepsilon$  ; on a  $\|p \otimes q\|_1 = \|p\|_1 \|q\|_1 \leq 1$  et  $(\tilde{f} \otimes \tilde{g})(p \otimes q) = \tilde{f}(p) \tilde{g}(q) \geq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}} - \varepsilon (\|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} + \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}})$  ; donc  $\|\tilde{f} \otimes \tilde{g}\|_{\mathcal{B}} \geq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{g}\|_{\mathcal{B}}$ .

## § 5. Points de Lebesgue

Soit  $I$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Quelle signification donner à  $\tilde{f}(x+u)$  quand  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(I)$  ? Si  $\tilde{f}$  est la limite en norme  $\|\cdot\|_1$  de la suite  $f_n \in \mathcal{E}(I)$ , il semble naturel de définir  $\tilde{f}(x+u)$  comme la limite en norme  $\|\cdot\|_1$  de la suite  $f_n(x+u)$ .

5.1. Théorème : Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(I)$  et soit une suite  $f_n \in \mathcal{E}(I)$  telle que  $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$  ; on convient de prolonger  $\tilde{f}$  et  $f_n$  par 0 en dehors de  $I$  ; alors  $f_n(x+u)$  converge en norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $I \times \mathbb{R}$  vers une fonctionnelle  $\tilde{f}(x+u) \in \mathcal{L}^1(I \times \mathbb{R})$ , indépendante de la suite particulière  $f_n$ .



Dém : On a  $\forall p > n \iint_{I \times \mathbb{R}} |f_p(x+u) - f_n(x+u)| dx du$   
 $= \int_I \left[ \int_{\mathbb{R}} |f_p(x+u) - f_n(x+u)| du \right] dx = \int_I \left[ \int_{\mathbb{R}} |f_p(v) - f_n(v)| dv \right] dx$   
 $= |I| \|f_p - f_n\|_1$  ; donc  $f_n(x+u)$  est bien une suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_1$   
sur  $I \times \mathbb{R}$ , dont nous noterons la limite  $\tilde{f}(x+u)$ . On démontre de façon analogue que  
cette limite est effectivement indépendante de la suite particulière  $f_n$ .

Attention !  $\tilde{f}(x+u)$  n'est pas une *fonction* des "variables"  $x$  et  $u$ , mais bien une *fonctionnelle* agissant sur  $\mathcal{E}_O(I \times \mathbb{R})$  ; la meilleure façon d'interpréter les symboles  $x$  et  $u$  revient donc à les considérer comme des *variables potentielles d'intégration*.

Il en va de même pour l'expression  $\tilde{f}(x)$ , dépourvue d'intégration explicite sur  $x$ , (écriture que nous avons soigneusement évitée jusqu'à présent) : dans ce qui suit  $\tilde{f}(x)$  représente en réalité la fonctionnelle  $\tilde{f} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ , elle aussi définie sur  $\mathcal{E}_O(I \times \mathbb{R})$ .

5.2. Définition : Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(I)$  ; on pose  $\forall s, t > 0$

$$\tilde{\Psi}_{s,t}(\tilde{f}) = \frac{1}{s+t} \int_{-s}^t |\tilde{f}(x+u) - \tilde{f}(x)| du.$$

$(s+t)\tilde{\Psi}_{s,t}(\tilde{f})$  n'est rien d'autre que la fonctionnelle marginale sur  $I$  de  $|\tilde{f}(x+u) - \tilde{f}(x)|$  restreint à  $I \times [-s, t]$  ; en conséquence  $\forall s, t > 0 \tilde{\Psi}_{s,t}(\tilde{f}) \in \mathcal{L}^1(I)$ .

5.3. Théorème : Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(I)$  ; alors  $\tilde{\Psi}_{s,t}(\tilde{f}) \xrightarrow{PP} 0$  quand  $s+t \rightarrow 0$ .

Dém : Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $g \in \mathcal{E}(I)$  tel que  $\|\tilde{f} - g\|_1 \leq \varepsilon^2$  ; alors on a  $\forall s, t > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{s,t}(\tilde{f}) &\leq \frac{1}{s+t} \int_{-s}^t |\tilde{f}(x+u) - g(x+u)| du \\ &\quad + \frac{1}{s+t} \int_{-s}^t |g(x+u) - g(x)| du + |\tilde{f}(x) - g(x)| \\ &= \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} |\tilde{f}(u) - g(u)| du + \frac{1}{s+t} \int_{-s}^t |g(x+u) - g(x)| du + |\tilde{f} - g| ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \left\{ \tilde{\Psi}_{s,t}(\tilde{f}) > \varepsilon \right\} &\leq \left\{ \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} |\tilde{f}(u) - g(u)| du > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{s+t} \int_{-s}^t |g(x+u) - g(x)| du > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + \left\{ |\tilde{f} - g| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \end{aligned}$$

On continue ensuite comme au Théorème X 4.4

5.4. \* Corollaire :

Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(I)$  ; alors  $\boxed{\frac{1}{t} \int_{-t}^t |\tilde{f}(x+u) - \tilde{f}(x)| du \xrightarrow{\text{pp}} 0}$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Ce corollaire correspond à l'affirmation classique de l'existence des "points de Lebesgue" presque partout sur  $I$ .

## § 6. Théorème de Fubini

6.1. Théorème de projection (voir notation au Théorème XIII B.)

Soit  $f \in \mathcal{E}(K)$  ; alors  $\forall x_o \in I \quad \boxed{f(x_o, *) \in \mathcal{E}(J)}$ .

$\boxed{\text{Idem en remplaçant } \mathcal{E} \text{ par } \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{PR} \text{ ou } \mathcal{W}}$ .

Dém : Le théorème est évident pour  $\mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{PR}$ . Démonstrons-le pour  $\mathcal{W}$ .

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $x_o \in I$ ,  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(J)$  ; soient  $g, h \in \mathcal{PR}(K)$  telles que  $g \leq f \leq h$  et  $(\delta_{x_o} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$  ; on a  $g(x_o, *) \in \mathcal{PR}(J)$ ,  $h(x_o, *) \in \mathcal{PR}(J)$  et  $g(x_o, *) \leq f(x_o, *) \leq h(x_o, *)$  ; de plus grâce au théorème de Fubini dans  $\mathcal{PR}(K)$  (que nous démontrons plus loin) on peut écrire

$\tilde{\nu} [h(x_o, *) - g(x_o, *)] = (\delta_{x_o} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$  ; donc  $f(x_o, *) \in \mathcal{W}(J)$ .

6.2. Théorème de transfert

Soient  $f \in \mathcal{E}(K)$  et  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(J)$  ; on pose  $\forall x \in I$

$F(x) = \tilde{\nu} [f(x, *)] = \int_J f(x, y) \tilde{\nu}(y)$  ; alors  $\boxed{F \in \mathcal{E}(I)}$ .

$\boxed{\text{Idem en remplaçant } \mathcal{E} \text{ par } \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{PR} \text{ ou } \mathcal{W}}$ .

Dém :

a)  $f \in \mathcal{E}(K)$  : Evident.

b)  $f \in \mathcal{C}(K)$  : Soit  $\varepsilon > 0$  ; par compacité de  $K$  il existe  $\eta > 0$  tel que  $\forall x_1, x_2 \in I$   
 $\forall y_1, y_2 \in J \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$  ; en particulier  $\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall y \in J$

$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \varepsilon$  ; donc  $\forall x_1, x_2 \in I$  on a

$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \int_J |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \tilde{\nu}(y) \leq \varepsilon \|\tilde{\nu}\|_*$  ; donc  $F \in \mathcal{C}(I)$ .

c)  $f \in \mathcal{R}(K)$  : Soit une suite  $f_n \in \mathcal{E}(K)$  telle que  $f_n \xrightarrow{u} f$  ;  
 posons  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_o \in I \quad F_n(x_o) = \tilde{\nu} [f_n(x_o, *)]$  ; on a  $\forall x_o \in I$   
 $|F(x_o) - F_n(x_o)| \leq \int_J |f(x_o, y) - f_n(x_o, y)| \tilde{\nu}(y) \leq \|f - f_n\| \|\tilde{\nu}\|_*$  ;  
 donc  $F_n \xrightarrow{u} F$  ; or  $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(I)$ , donc  $F \in \mathcal{R}(I)$ .

d)  $f \in \mathcal{PR}(K)$  : Soit une suite  $f_n \in \mathcal{E}(K)$  telle que  $f_n \xrightarrow{b} f$  ; on a en particulier  
 $\forall x_o \in I \quad f_n(x_o, *) \xrightarrow{b} f(x_o, *)$ , donc par le théorème de Lebesgue sur  $J$   
 $\forall x_o \in I \quad F_n(x_o) = \int_J f_n(x_o, y) \tilde{\nu}(y) \rightarrow \int_J f(x_o, y) \tilde{\nu}(y) = F(x_o)$  ; de plus  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $\|F_n\| \leq \|f_n\| \|\tilde{\nu}\|_*$ , donc  $F_n \xrightarrow{b} F$  ; or  $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(I)$ , donc  $F \in \mathcal{PR}(I)$ .

e)  $f \in \mathcal{W}(K)$  : Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+(I)$ ,  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(J)$  ; soient  $g, h \in \mathcal{PR}(K)$   
 telles que  $g \leq f \leq h$  et  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$  ; posons  $\forall x_o \in I$   
 $G(x_o) = \int_J g(x_o, y) \tilde{\nu}(y)$  et  $H(x_o) = \int_J h(x_o, y) \tilde{\nu}(y)$  ;  
 on a  $G, H \in \mathcal{PR}(I)$  et  $G \leq F \leq H$  ;

de plus grâce au théorème de Fubini dans  $\mathcal{PR}(K)$  (que nous démontrons plus loin)  
 on peut écrire  $\tilde{\mu}(H - G) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$  ; donc  $F \in \mathcal{W}(I)$ .

Le théorème est donc démontré pour tout  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(J)$  ; soit alors  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(J)$  ;  
 on a  $\forall x_o \in I \quad F(x_o) = \int_J f(x_o, y) \tilde{\nu}(y) = \int_J f(x_o, y) \tilde{\nu}^+(y) - \int_J f(x_o, y) \tilde{\nu}^-(y)$ ,  
 donc  $F \in \mathcal{W}(I)$ .

### 6.3. Théorème de Fubini

Soient  $f \in \mathcal{W}(K)$ ,  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(I)$ ,  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(J)$  ; alors on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \int_I \left[ \int_J f(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x) = \int_J \left[ \int_I f(x, y) \tilde{\mu}(x) \right] \tilde{\nu}(y) .}$$

Dém :

a)  $f \in \mathcal{E}(K)$  : Evident.

b)  $f \in \mathcal{PR}(K)$  : Soit une suite  $f_n \in \mathcal{E}(K)$  telle que  $f_n \xrightarrow{b} f$  ;

par définition on a  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \lim_n [(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f_n)]$  ; or on peut écrire  $\forall n \in \mathbb{N}$

$(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f_n) = \int_I \left[ \int_J f_n(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x)$  ; posons  $\forall x_o \in I$

$F(x_o) = \int_J f(x_o, y) \tilde{\nu}(y)$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n(x_o) = \int_J f_n(x_o, y) \tilde{\nu}(y)$  ;

on a  $F \in \mathcal{PR}(\mathbb{I})$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{E}(\mathbb{I})$  ; comme  $\forall x_o \in \mathbb{I} \quad f_n(x_o, *) \xrightarrow{b} f(x_o, *)$ ,

le théorème de Lebesgue sur  $\mathbb{J}$  nous donne  $\forall x_o \in \mathbb{I} \quad F_n(x_o) \rightarrow F(x_o)$  ;

on en déduit  $F_n \xrightarrow{b} F$  ; le théorème de Lebesgue sur  $\mathbb{I}$  nous donne donc

$$(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f_n) = \int_{\mathbb{I}} F_n(x) \tilde{\mu}(x) \rightarrow \int_{\mathbb{I}} F(x) \tilde{\mu}(x) ; \text{ on en déduit}$$

$$(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \lim_n [(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f_n)] = \int_{\mathbb{I}} F(x) \tilde{\mu}(x).$$

c)  $f \in \mathcal{W}(\mathbb{K})$  : Soient  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{I})$  et  $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{I})$  ; soit  $\varepsilon > 0$

et soient  $g, h \in \mathcal{PR}(\mathbb{K})$  tels que  $g \leq f \leq h$  et  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$  ;

$$\text{on a } (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g) = \int_{\mathbb{I}} \left[ \int_{\mathbb{J}} g(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x)$$

$$\text{et } (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h) = \int_{\mathbb{I}} \left[ \int_{\mathbb{J}} h(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x) ;$$

on en déduit  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g) \leq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) \leq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h)$

$$\text{et } (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g) \leq \int_{\mathbb{I}} \left[ \int_{\mathbb{J}} f(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x) \leq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h) ;$$

de plus  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(h) - (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g) \leq \varepsilon$  ;

$$\text{donc } \left| (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) - \int_{\mathbb{I}} \left[ \int_{\mathbb{J}} f(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x) \right| \leq \varepsilon ;$$

$$\text{comme } \varepsilon \text{ est arbitraire on en déduit } (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \int_{\mathbb{I}} \left[ \int_{\mathbb{J}} f(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x).$$

Le cas général s'obtient en décomposant  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\nu}$  en parties positives et négatives.

## § 7. Généralisation à $\mathbb{R}^2$

Les deux théorèmes suivants se déduisent facilement des théorèmes correspondants pour les rectangles.

### A. Théorème de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$

Soit une suite  $f_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$  telle que  $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$  ; alors  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^2)$   
on a  $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} f \tilde{\mu}$  ; en conséquence  $\tilde{\mu}(f_n) \rightarrow \tilde{\mu}(f)$ .

B. Théorème de Fubini sur  $\mathbb{R}^2$

Soient  $f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$  et  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  ; alors  $\int_{\mathbb{R}} f(*, y) \tilde{\nu}(y)$  et  $\int_{\mathbb{R}} f(x, *) \tilde{\mu}(x)$  appartiennent à  $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$  et on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \tilde{\nu}(y) \right] \tilde{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \tilde{\mu}(x) \right] \tilde{\nu}(y) .}$$

C. Théorème de Fubini sur  $\mathbb{R}^2$  : Intégrales généralisées

Soit  $f \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$  et supposons  $\sup_k \int_{-k}^k \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy < +\infty$  ;

alors  $\int_{\mathbb{R}} f(*, y) dy$  et  $\int_{\mathbb{R}} f(x, *) dx$  appartiennent à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et on a

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy .}$$

Dém : Posons  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k = \int_{-k}^k \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy$  et soit  $\alpha = \sup_k \alpha_k < +\infty$  ;

$$\begin{aligned} \text{on a } \forall \ell \geq k \quad \alpha_\ell - \alpha_k &= \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x, y)| dx dy - \int_{-k}^k \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x, y)| dx dy - \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy \\ &\quad + \int_{-\ell}^{-k} \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy + \int_k^{\ell} \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{-k} |f(x, y)| dx dy + \int_{-\ell}^{\ell} \int_k^{\ell} |f(x, y)| dx dy \\ &\quad + \int_{-\ell}^{-k} \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy + \int_k^{\ell} \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy . \end{aligned}$$

Par ailleurs posons  $\forall k \in \mathbb{N} \quad F_k = \int_{-k}^k f(*, y) dy \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$  ;

$F_k$  est une fonction sommable ; en effet on a  $\forall n \geq k$

$$\int_{-n}^n |F_k(x)| dx = \int_{-n}^n \left| \int_{-k}^k f(x, y) \right| dx dy \leq \int_{-n}^n \int_{-k}^k |f(x, y)| dx dy \leq \alpha_n \leq \alpha ;$$

donc  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \|F_k\|_1 = \sup_n \int_{-n}^n |F_k(x)| dx \leq \alpha .$

Montrons que la suite  $F_k$  converge sur  $\mathbb{R}$  en norme  $\|\cdot\|_1$  ; on a  $\forall n \geq \ell > k$

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n |F_\ell(x) - F_k(x)| dx &= \int_{-n}^n \left| \int_{-\ell}^\ell f(x, y) dy - \int_{-k}^k f(x, y) dy \right| dx \\ &= \int_{-n}^n \left| \int_{-\ell}^{-k} f(x, y) dy + \int_k^\ell f(x, y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-n}^n \int_{-\ell}^{-k} |f(x, y)| dx dy + \int_{-n}^n \int_k^\ell |f(x, y)| dx dy \\ &\leq \int_{-n}^n \int_{-n}^{-k} |f(x, y)| dx dy + \int_{-n}^n \int_k^n |f(x, y)| dx dy \leq \alpha_n - \alpha_k \leq \alpha - \alpha_k ; \end{aligned}$$

on en déduit  $\forall \ell > k \quad \|F_\ell - F_k\|_1 = \lim_n \int_{-n}^n |F_\ell(x) - F_k(x)| dx \leq \alpha - \alpha_k$ .

Par conséquent la suite  $F_k$  est de Cauchy dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et converge vers une fonctionnelle de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , que nous notons  $\int_{\mathbb{R}} f(*, y) dy$ .

De même  $\forall k \in \mathbb{N} \quad G_k = \int_{-k}^k f(x, *) dx \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$  est une fonction sommable, et la suite  $G_k$  converge sur  $\mathbb{R}$  en norme  $\|\cdot\|_1$  vers  $\int_{\mathbb{R}} f(x, *) dx \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

Montrons que l'on a  $\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy$ ,

$$\text{c-à-d} \quad \lim_k \int_{\mathbb{R}} F_k(x) dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}} G_k(x) dx,$$

$$\text{c-à-d} \quad \lim_k \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{-k}^k f(x, y) dy \right] dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{-k}^k f(x, y) dx \right] dy$$

$$\text{c-à-d} \quad \lim_k \lim_j \int_{-j}^j \left[ \int_{-k}^k f(x, y) dy \right] dx = \lim_k \lim_j \int_{-j}^j \left[ \int_{-k}^k f(x, y) dx \right] dy$$

$$\text{c-à-d} \quad \lim_k \lim_j \int_{-k}^k \int_{-j}^j f(x, y) dx dy = \lim_k \lim_j \int_{-j}^j \int_{-k}^k f(x, y) dx dy.$$

$$\text{On a} \quad \forall k > j \quad \left| \int_{-k}^k \int_{-j}^j f(x, y) dx dy - \int_{-j}^j \int_{-k}^k f(x, y) dx dy \right|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-k}^k \int_{-j}^j f(x, y) dx dy - \int_{-j}^j \int_{-j}^j f(x, y) dx dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{-j}^j \int_{-k}^{-j} f(x, y) dx dy - \int_{-j}^j \int_j^k f(x, y) dx dy \right| \end{aligned}$$

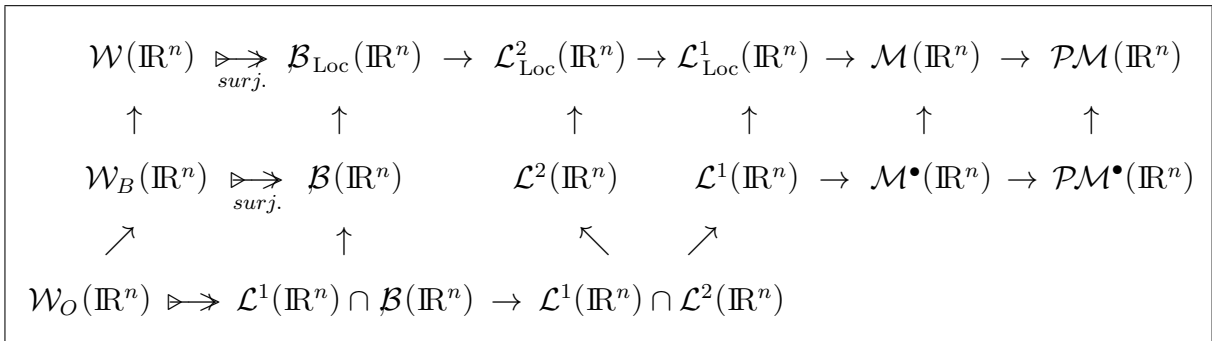
$$\begin{aligned} &= \left| \int_{-k}^{-j} \int_{-j}^j f(x, y) dx dy + \int_j^k \int_{-j}^j f(x, y) dx dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{-j}^j \int_{-k}^{-j} f(x, y) dx dy - \int_{-j}^j \int_j^k f(x, y) dx dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-k}^{-j} \int_{-j}^j |f(x, y)| \, dx \, dy + \int_j^k \int_{-j}^j |f(x, y)| \, dx \, dy \\
&\quad + \int_{-j}^j \int_{-k}^{-j} |f(x, y)| \, dx \, dy + \int_{-j}^j \int_j^k |f(x, y)| \, dx \, dy \\
&\leq \int_{-k}^{-j} \int_{-j}^j |f(x, y)| \, dx \, dy + \int_j^k \int_{-j}^j |f(x, y)| \, dx \, dy \\
&\quad + \int_{-k}^k \int_{-k}^{-j} |f(x, y)| \, dx \, dy + \int_{-k}^k \int_j^k |f(x, y)| \, dx \, dy = \alpha_k - \alpha_j ; \\
\text{donc } \lim_k \lim_j \left| \int_{-k}^k \int_{-j}^j f(x, y) \, dx \, dy - \int_{-j}^j \int_{-k}^k f(x, y) \, dx \, dy \right| &\leq \alpha - \alpha = 0 .
\end{aligned}$$

### § 8. Généralisation à $\mathbb{R}^n$

Tous les résultats de ce chapitre se généralisent sans difficulté majeure aux espaces  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ).

Récapitulatif : (les flèches simples représentent des inclusions)







## CHAPITRE XVI

### APPLICATIONS

Dérivation des primitives . Convolution . Transformée de Laplace . Théorème de Titchmarsh . Transformée de Fourier .

#### § 1. Dérivation des primitives

1.1. Définition : Soit  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^\bullet(\mathbb{R})$  ; on pose  $\forall s > 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) = \frac{1}{s+t} \tilde{\mu}(\mathbb{1}_{[x-s, x+t]}) = \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} \tilde{\mu}(u) .$$

1.2. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$  et  $\|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})\| \leq \frac{1}{s+t} \|\tilde{\mu}\|_\star$ .

Dém : Si  $F$  est une primitive de  $\tilde{\mu}$  on a  $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) = \frac{1}{s+t} [F(x+t) - F(x-s)]$ , donc  $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})$  est une fonction continue ;

de plus  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)| \leq \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} |\tilde{\mu}|(x) \leq \frac{1}{s+t} \|\tilde{\mu}\|_\star$ .

1.3. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $\|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})\|_1 \leq \|\tilde{\mu}\|_\star$ .

Dém :  $\|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x)| dx \leq \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-s, x+t]}(u) |\tilde{\mu}|(u) \right] dx$

or  $\forall x, s, t \in \mathbb{R}$  on a  $\mathbb{1}_{[x-s, x+t]}(u) = \mathbb{1}_{[u-t, u+s]}(x)$ , donc

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})\|_1 &\leq \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[u-t, u+s]}(x) dx \right] |\tilde{\mu}|(u) = \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{u-t}^{u+s} dx \right] |\tilde{\mu}|(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\mu}|(u) = \|\tilde{\mu}\|_\star . \end{aligned}$$

1.4. \* Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $\int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}$ .

1.5. Théorème :  $\forall f \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$  on a  $\|\Phi_{s,t}(f)\| \leq \|f\|$  ;

de plus  $\Phi_{s,t}(f) \rightarrow f$  uniformément sur tout compact quand  $s+t \rightarrow 0$ .

Dém : On a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\Phi_{s,t}(f)(x)| \leq \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} |f|(u) du \leq \|f\|$  ;

d'autre part soit  $[a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et soit  $\varepsilon > 0$  ;

comme  $f$  est uniformément continue dans  $[a, b]$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que

$\forall u, v \in [a, b] \quad \left[ |u - v| \leq \alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon \right]$  ; on a donc  $\forall s, t \leq \alpha$

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b] \quad |\Phi_{s,t}(f)(x) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \left[ f[x + (s+t)u - s] - f(x) \right] du \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| f[x + (s+t)u - s] - f(x) \right| du \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

1.6. Théorème :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  on a  $\Phi_{s,t}(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \tilde{f}$  quand  $s+t \rightarrow 0$ .

Dém : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires  $\Phi_{s,t} - I : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

1.7. Théorème :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on a  $\Phi_{s,t}(\tilde{f}) \xrightarrow{2} \tilde{f}$  quand  $s+t \rightarrow 0$ .

Dém : Analogue à la précédente.

1.8. Lemme :  $\forall f \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$  on a  $\|\Phi_{s,t}(f)\| \leq \|f\|$  ; de plus, si  $x \in \mathbb{R}$  est un point de continuité de  $f$  on a  $\Phi_{s,t}(f)(x) \rightarrow f(x)$  quand  $s+t \rightarrow 0$ .

Dém : Il suffit de faire un dessin !

1.9. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_D^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $\Phi_{s,t}(\tilde{\mu}) \xrightarrow{\phi} \tilde{\mu}$  quand  $s+t \rightarrow 0$ .

Dém : Comme  $\forall s, t > 0$  on a  $\|\Phi_{s,t}(\tilde{\mu})\|_1 \leq \|\tilde{\mu}\|_*$ , il suffit de montrer que

$$\forall h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) h(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h(u) \tilde{\mu}(u) \quad \text{quand } s+t \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) h(x) dx &= \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-s, x+t]}(u) |\tilde{\mu}|(u) \right] h(x) dx \\ &= \frac{1}{s+t} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[u-t, u+s]}(x) h(x) dx \right] \tilde{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(h)(u) \tilde{\mu}(u) ; \end{aligned}$$

$$\text{or } \Phi_{s,t}(h) \xrightarrow{b} h, \text{ donc } \int_{\mathbb{R}} \Phi_{s,t}(\tilde{\mu})(x) h(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h(u) \tilde{\mu}(u).$$

## § 2. Convolution sur $\mathbb{R}$

2.1. Lemme : Soit  $f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$  ; posons  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (r, s) \mapsto f(r + s)$  ; alors on a  $F \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^2)$ .

Dém : Il suffit de faire un dessin.

2.2. Définition : La convolée de  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  est définie par

$$\tilde{\mu} * \tilde{\nu} : \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \iint_{\mathbb{R}^2} f(r + s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) .$$

2.3. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  et  $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_* \leq \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*$ .

Dém : On a  $\forall h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \quad |(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)| \leq \|h\| \iint_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mu}(r)| |\tilde{\nu}(s)| = \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_* \|h\|$  ; donc  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$  et  $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_* \leq \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*$ .

Montrons que  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  ; soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  ; posons  $\forall \varepsilon \neq 0 \quad g_\varepsilon = \mathbb{1}_{] \alpha, \alpha + \varepsilon [}$  ; fixons  $s \in \mathbb{R}$  et posons  $h_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto g_\varepsilon(r + s)$  ; on a  $h_\varepsilon = \mathbb{1}_{] \alpha - s, \alpha - s + \varepsilon [}$  ; donc  $h_\varepsilon \xrightarrow{\circ} 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ; de plus  $\forall \varepsilon \neq 0 \quad \|h_\varepsilon\| = 1$  ; donc  $\forall s \in \mathbb{R}$  on a  $k_\varepsilon(s) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(r + s) \tilde{\mu}(r) = \int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(r) \tilde{\mu}(r) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ; de plus  $\forall \varepsilon \neq 0$  on a  $\|k_\varepsilon\| \leq \|\tilde{\mu}\|_*$ , donc  $\int_{\mathbb{R}} k_\varepsilon(s) \tilde{\nu}(s) = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g_\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ; donc  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ .

2.4.\* Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}(\mathbb{1}) \tilde{\nu}(\mathbb{1})$  ; de plus si  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ , alors  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$  et  $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_* = \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*$ .

2.5. Théorème :  $(\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}), *)$  est une algèbre de Banach associative, commutative et unitaire.  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  est une sous-algèbre de Banach de  $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ .

Dém : Classique.

2.6. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \quad \forall f \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R})$  on a

$$(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r + s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) .$$

Dém : Soit  $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^2)$  avec  $f_n \xrightarrow{b} f$  ; on a donc  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f_n) \rightarrow (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f)$  ;  
 posons  $F(r, s) = f(r + s)$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n(r, s) = f_n(r + s)$  ; on a  
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R}^2)$  et  $F_n \xrightarrow{b} F$ , donc  $F \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}^2)$   
 et  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F_n) \rightarrow (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F)$  ; or on a  $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f_n) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F_n)$ ,  
 donc  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

2.7. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \quad \forall f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$  on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r + s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) .}$$

Dém : Par linéarité on peut supposer  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ , donc  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$   
 et  $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^2)^+$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et soient  $g, h \in \mathcal{PR}_B(\mathbb{R})$  tels que  $g \leq f \leq h$   
 et  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$ . Posons  $G(r, s) = g(r + s)$  et  $H(r, s) = h(r + s)$ .  
 On a  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(G) \leq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F) \leq (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(H) = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)$   
 et  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g) \leq (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) \leq (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h)$ , donc  
 $|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(f) - (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(F)| \leq |(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h) - (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(g)| = (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(h - g) \leq \varepsilon$  ;  
 on en déduit  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(F)$ .

### § 3. Convolution sur $\mathbb{R}^+$

(Démonstrations analogues à celles du paragraphe précédent.)

3.1. Lemme : Soit  $f \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+)$  ; posons  $F : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R} : (r, s) \mapsto f(r + s)$  ;  
 alors on a  $F \in \mathcal{PR}_O[(\mathbb{R}^+)^2]$ .

3.2. Définition : La convolée de  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  est définie par

$$\boxed{\tilde{\mu} * \tilde{\nu} : \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f(r + s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) .}$$

3.3. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  on a  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ .

3.4. Théorème :

$\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  on a  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  et  $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_* \leq \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*$ .

3.5. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  on a  $(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}(\mathbb{1}) \tilde{\nu}(\mathbb{1})$  ; de plus si  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)^+$ , alors  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)^+$  et  $\|\tilde{\mu} * \tilde{\nu}\|_* = \|\tilde{\mu}\|_* \|\tilde{\nu}\|_*$ .

3.6. Théorème :  $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^+), *)$  est une algèbre de Banach associative commutative et unitaire.  $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  et  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$  sont des sous-algèbres de Banach de  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ .

3.7. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \quad \forall f \in \mathcal{W}_O(\mathbb{R}^+)$  on a

$$\boxed{(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(f) = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} f(r+s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) .}$$

## § 4. Transformée de Laplace

4.1. Définition :

On pose  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  ; soit  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  ; on définit  $\forall z \in H$

$$\boxed{(\mathbb{L} \tilde{\mu})(z) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} \tilde{\mu}(t) .}$$

$\mathbb{L} \tilde{\mu}$  est la transformée de Laplace de  $\tilde{\mu}$ .

4.2. Théorème :  $\mathbb{L} \tilde{\mu}$  est une fonction analytique dans  $H$  ; de plus  $\|\mathbb{L} \tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_*$ .

Dém : On applique le théorème d'holomorphie.

4.3. Lemme :

Soit  $h \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+)$  et  $\varepsilon > 0$  ; alors il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\boxed{\forall t \geq 0 \quad |h(t) - P(e^{-t})| \leq \varepsilon .}$$

Dém : On définit la fonction  $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de la manière suivante :  $k(0) = 0$  et  $k(u) = h(-\ln u)$  si  $0 < u \leq 1$  ; la fonction  $k$  étant continue sur  $[0, 1]$ , il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall u \in [0, 1] \quad |k(u) - P(u)| \leq \varepsilon$  ; en particulier on a  $\forall u \in ]0, 1] \quad |h(-\ln u) - P(u)| \leq \varepsilon$  ; on en déduit  $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |h(t) - P(e^{-t})| \leq \varepsilon$ .

4.4. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  on a  $[\mathbb{L} \tilde{\mu} = 0 \text{ dans } H \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0]$ .

Dém : Supposons  $\mathbb{L} \tilde{\mu} = 0$  dans  $H$  ; alors on a  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}^+} e^{-nt} \tilde{\mu}(t) = 0$ , donc

aussi  $\forall P \in \mathbb{R}[X] \int_{\mathbb{R}^+} P(e^{-t}) \tilde{\mu}(t) = 0$  ; en vertu du lemme précédent on en déduit

$\forall h \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R}^+) \int_{\mathbb{R}^+} h(t) \tilde{\mu}(t) = 0$ , c-à-d  $\tilde{\mu} = 0$ .

4.5. Théorème :  $\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$  on a  $\boxed{L(\tilde{\mu} * \tilde{\nu}) = (L\tilde{\mu})(L\tilde{\nu})}$ .

Dém : On a  $\forall z \in \mathbb{H}$

$$L(\tilde{\mu} * \tilde{\nu})(z) = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-z(r+s)} \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zr} \tilde{\mu}(r) \int_{\mathbb{R}} e^{-zs} \tilde{\nu}(s) = (L\tilde{\mu})(z) (L\tilde{\nu})(z).$$

## § 5. Théorème de Titchmarsh

5.1. Théorème de Titchmarsh dans  $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+) \text{ on a } \left[ \tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{\mu} = 0 \text{ ou } \tilde{\nu} = 0) \right]}.$$

Dém : Supposons  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$  ; on en déduit  $(L\tilde{\mu})(L\tilde{\nu}) = 0$  ;  $L\tilde{\mu}$  et  $L\tilde{\nu}$  sont des fonctions analytiques dans  $\mathbb{H}$  ; supposons  $L\tilde{\mu} \neq 0$  ; alors les zéros de  $L\tilde{\mu}$  sont isolés ; donc les zéros de  $L\tilde{\nu}$  sont denses, donc  $L\tilde{\nu} = 0$ , donc  $\tilde{\nu} = 0$ .

5.2. Définition :  $\forall a > 0$  on pose  $\boxed{Y_a = \mathbb{1}_{[0, a]}} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+)$  ;

$\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  on pose  $\boxed{\tilde{\mu}_a = Y_a \cdot \tilde{\mu}} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+)$ .

5.3. Lemme :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+) \quad \forall a > 0$  on a

$$\left[ \int_0^a e^{z(a-t)} \tilde{\mu}(t) \text{ borné dans } \mathbb{H} \right] \Rightarrow \tilde{\mu}_a = 0.$$

Dém :

Posons  $\forall z \in \mathbb{C} \quad G(z) = \int_0^a e^{z(a-t)} \tilde{\mu}(t)$  et supposons  $G$  borné dans  $\mathbb{H}$  ;  $G$  est par ailleurs borné dans  $\mathbb{C} - \mathbb{H}$  ; or  $G$  est analytique dans  $\mathbb{C}$ , donc  $G = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

On en déduit  $\forall n \in \mathbb{N} \quad G^{(n)}(0) = \int_0^a (a-t)^n \tilde{\mu}(t) = 0$ , donc  $\forall P \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_0^a P(t) \tilde{\mu}(t) = 0, \text{ donc aussi } \forall h \in \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R}) \int_0^a h(t) \tilde{\mu}(t) = 0,$$

donc  $\tilde{\mu} = 0$  sur  $[0, a]$ .

5.4. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}^+) \quad \forall a > 0$  on a

$$\left[ e^{az} (\mathbf{L} \tilde{\mu})(z) \text{ borné dans } \mathbb{H} \right] \Leftrightarrow \tilde{\mu}_a = 0.$$

Dém :

a)  $\Leftarrow$  : On a  $e^{az} (\mathbf{L} \tilde{\mu})(z) = \int_a^\infty e^{-z(t-a)} \tilde{\mu}(t)$  qui est bien borné sur  $\mathbb{H}$ .

b)  $\Rightarrow$  : On a  $\forall z \in \mathbb{H} \quad \int_0^a e^{z(a-t)} \tilde{\mu}(t) = e^{az} (\mathbf{L} \tilde{\mu})(z) - \int_a^\infty e^{-z(t-a)} \tilde{\mu}(t)$   
qui est borné dans  $\mathbb{H}$ , donc  $\tilde{\mu}_a = 0$ .

5.5. Lemme :

Soit  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  tel que  $\tilde{\mu} * \tilde{\mu} = 0$  et soit  $a > 0$  ; alors  $(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a)_a = 0$ .

Dém : On a  $\forall h \in \mathcal{E}([0, a], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a)(h) &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(r+s) \tilde{\mu}_a(r) \tilde{\mu}_a(s) = \int_0^a \int_0^a h(r+s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\mu}(s) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(r+s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\mu}(s) = (\tilde{\mu} * \tilde{\mu})(h) = 0. \end{aligned}$$

5.6. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  on a  $[\tilde{\mu} * \tilde{\mu} = 0 \Rightarrow \tilde{\mu} = 0]$ .

Dém : Soit  $a > 0$  ; alors  $(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a)_a = 0$ , donc  $e^{az} \mathbf{L}(\tilde{\mu}_a * \tilde{\mu}_a) = e^{az} [\mathbf{L}(\tilde{\mu}_a)]^2$   
 $= [e^{az/2} \mathbf{L}(\tilde{\mu}_a)]^2$  est borné dans  $\mathbb{H}$ , donc également  $e^{az/2} \mathbf{L}(\tilde{\mu}_a)$  ; donc  $(\tilde{\mu}_a)_{a/2} = 0$ ,  
c-à-d  $\tilde{\mu}_{a/2} = 0$  ; comme  $a$  est arbitraire,  $\tilde{\mu} = 0$ .

5.7. Lemme : Soient  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  tels que  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$  ; alors  $(t\tilde{\mu}) * \tilde{\nu} = 0$ .

Dém : On a  $\forall h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{\mu} * \tilde{\nu})[t.h(t)] = \int_0^\infty \int_0^\infty (r+s) h(r+s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(r+s) r \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) + \int_0^\infty \int_0^\infty h(r+s) \tilde{\mu}(r) s \tilde{\nu}(s) = [(t\tilde{\mu}) * \tilde{\nu} + \tilde{\mu} * (t\tilde{\nu})](h) ; \end{aligned}$$

posons  $\tilde{\mu}' = t\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\nu}' = t\tilde{\nu}$  ; on a  $\tilde{\mu}' * \tilde{\nu} + \tilde{\mu} * \tilde{\nu}' = 0$ , donc

$$0 = (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu}) * (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu} + \tilde{\mu} * \tilde{\nu}') = (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu}) * (\tilde{\mu}' * \tilde{\nu}), \text{ donc } \tilde{\mu}' * \tilde{\nu} = 0.$$

5.8. Théorème :

Soient  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  tels que  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$  ; alors  $\forall i, j \in \mathbb{N} \quad (t^i \tilde{\mu}) * (t^j \tilde{\nu}) = 0$ .

Dém : On fait une récurrence sur  $i$  et  $j$ .

5.9. Lemme :

Soient  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$  tels que  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$  ; soit  $a > 0$  et soit  $T_a$  le triangle dont les sommets sont  $(0, 0), (a, 0), (0, a)$  ; alors  $\forall P \in \mathbb{R}[X, Y]$  on a  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{T_a} \cdot P) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Dém} : (\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{T_a} \cdot P) &= \int_0^\infty \int_0^\infty Y_a(r+s) P(r, s) \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \int_0^\infty \int_0^\infty Y_a(r+s) r^i s^j \tilde{\mu}(r) \tilde{\nu}(s) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} (t^i \tilde{\mu} * t^j \tilde{\nu})(Y_a) = 0. \end{aligned}$$

5.10. Théorème de Titchmarsh dans  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$

$$\boxed{\forall \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \text{ on a } \left[ \tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{\mu} = 0 \text{ ou } \tilde{\nu} = 0) \right]}.$$

Dém : On suppose  $\tilde{\mu} * \tilde{\nu} = 0$ . Soit  $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  et choisissons  $a > 0$  tel que  $g = 0$  en dehors du triangle  $T_a$  ; soit  $\varepsilon > 0$  ; d'après le théorème de Weierstrass pour un compact du plan, il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X, Y]$  tel que  $\|g - P\| \leq \varepsilon$  dans  $T_a$  ; on peut dès lors écrire  $|(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g)| = |(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{T_a} \cdot g)| \leq |(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{T_a} \cdot P)| + |(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(\mathbb{1}_{T_a} \cdot (g - P))| \leq \varepsilon |\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}|(\mathbb{1}_{T_a})$  ; comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on a  $(\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu})(g) = 0$  ; on en déduit  $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu} = 0$ , donc  $\tilde{\mu} = 0$  ou  $\tilde{\nu} = 0$ .

## § 6. Transformée réelle de Fourier

6.1. Définition : Soit  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  ; on pose  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(A\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) \tilde{\mu}(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{(B\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin(xt) \tilde{\mu}(t)}$$

$A\tilde{\mu}$  et  $B\tilde{\mu}$  s'appellent la transformée cosinusoidale et la transformée sinusoidale de  $\tilde{\mu}$ .

Notation :

On note  $\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$  l'algèbre des fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornées uniformément continues.

6.2.\* Théorème :  $(\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  est une algèbre de Riesz-Banach.

6.3. Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  on a

- 1)  $A\tilde{\mu} \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$  et  $B\tilde{\mu} \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$
- 2)  $\|A\tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_*$  et  $\|B\tilde{\mu}\| \leq \|\tilde{\mu}\|_*$



3)  $A\tilde{\mu}$  est une fonction paire et  $B\tilde{\mu}$  est une fonction impaire

4) ( $\tilde{\mu}$  impaire  $\Rightarrow A\tilde{\mu} = 0$ ) et ( $\tilde{\mu}$  paire  $\Rightarrow B\tilde{\mu} = 0$ ).

Dém : Le reste étant trivial, montrons que  $A\tilde{\mu}$  et  $B\tilde{\mu}$  sont uniformément continues.

Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $N > 0$  tel que  $\int_{|t| \geq N} |\tilde{\mu}(t)| \leq \varepsilon$ ; on a  $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |(A\tilde{\mu})(u) - (A\tilde{\mu})(v)| &= \left| \int_{-N}^N [\cos(ut) - \cos(vt)] \tilde{\mu}(t) + \int_{|t| \geq N} [\cos(ut) - \cos(vt)] \tilde{\mu}(t) \right| \\ &\leq |u - v| \underbrace{\int_{-N}^N |t| |\tilde{\mu}(t)|}_{K} + 2\varepsilon; \end{aligned}$$

on en déduit  $\left[ |u - v| \leq \varepsilon/K \Rightarrow |(A\tilde{\mu})(u) - (A\tilde{\mu})(v)| \leq 3\varepsilon \right]$ .

Notation : On note  $\mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$  l'algèbre des fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à support borné et à dérivée seconde réglée.

6.4. Théorème : Soit  $f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$ ; alors on a  $Af \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ,

$Bf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et  $\boxed{(A^2 + B^2)f = 2\pi f}$ .

Dém : On a  $\forall x \in \mathbb{R}$   $(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) f(t) dt$ ; donc  $\forall x \neq 0$

$$(Af)(x) = -\frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} \sin(xt) f'(t) dt = \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) f''(t) dt; \text{ on en déduit}$$

si  $|x| \leq 1$   $|(Af)(x)| \leq \|f\|_1$  et si  $|x| \geq 1$   $|(Af)(x)| \leq \frac{1}{x^2} \|f''\|_1$ ;

donc  $Af \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ; idem pour  $Bf$ ;  $A^2 + B^2$  est donc bien défini sur  $\mathcal{R}_O^2(\mathbb{R})$ .

On a  $\forall x \in \mathbb{R}$   $[(A^2 + B^2)f](x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(xu) \left[ \int_{\mathbb{R}} \cos(ut) f(t) dt \right] du + \int_{\mathbb{R}} \sin(xu) \left[ \int_{\mathbb{R}} \sin(ut) f(t) dt \right] du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} [\cos(xu)\cos(ut) + \sin(xu)\sin(ut)] f(t) dt \right] du.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \cos[u(t-x)] f(t) dt \right] du = 2 \int_0^\infty \left[ \int_{\mathbb{R}} \cos[u(t-x)] f(t) dt \right] du$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}$  et posons  $\forall u \geq 0$   $\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}} \cos[u(t-x)] f(t) dt$ ;

soit  $M > 0$  tel que  $\left[ |t| \geq M \Rightarrow f(t) = 0 \right]$ ;

on a  $\Phi(u) = \int_{-M}^M \cos[u(t-x)] f(t) dt$ , donc  $\forall u > 0$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{u} \int_{-M}^M \sin[u(t-x)] f'(t) dt = \frac{2}{u^2} \int_{-M}^M \sin^2[u(t-x)/2] f''(t) dt;$$

posons  $\forall u > 0 \quad \forall t \in [-M, M] \quad H(u, t) = \frac{1 + u^{3/2}}{u^2} \sin^2 [u(t-x)/2] ;$

$\forall u \in ]0, 1[ \quad \forall t \in [-M, M] \quad$  on a  $0 \leq H(u, t) \leq \frac{1}{2} (t-x)^2$  car  $\forall a \in \mathbb{R} \quad |\sin a| \leq |a|,$

donc  $0 \leq H(u, t) \leq \frac{1}{2} (M + |x|)^2 ;$  de même  $\forall u > 1 \quad \forall t \in [-M, M] \quad$  on a

$0 \leq H(u, t) \leq 2 ;$  donc  $H$  est borné dans  $\mathbb{R}_*^+ \times [-M, M].$

On en déduit

$$\begin{aligned} [(A^2 + B^2)f](x) &= 2 \int_0^\infty \Phi(u) du = 4 \int_0^\infty \left[ \int_{-M}^M H(u, t) f''(t) dt \right] \frac{du}{1 + u^{3/2}} \\ &= 4 \int_{-M}^M \left[ \int_0^\infty H(u, t) \frac{du}{1 + u^{3/2}} \right] f''(t) dt = 4 \int_{-M}^M \left[ \int_0^\infty \frac{\sin^2 [u(t-x)/2]}{u^2} \right] f''(t) dt ; \end{aligned}$$

or un résultat classique nous dit que  $\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2(au)}{u^2} = \frac{\pi}{2} |a| ;$

$$\begin{aligned} \text{on a donc} \quad \frac{1}{\pi} [(A^2 + B^2)f](x) &= \int_{-M}^M |t-x| f''(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| f''(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x (x-t) f''(t) dt + \int_x^{+\infty} (t-x) f''(t) dt = \int_{-\infty}^x f'(t) dt - \int_x^{+\infty} f'(t) dt = 2f(x). \end{aligned}$$

6.5. Théorème :  $\forall f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R}) \quad$  on a  $\boxed{\|Af\|_2^2 + \|Bf\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2}.$

$$\begin{aligned} \text{Dém} : \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = \int_{-M}^M f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M [(A^2 + B^2)f](x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M \left[ \int_0^\infty \left\{ \int_{-M}^M \cos [u(t-x)] f(t) dt \right\} du \right] f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-M}^M \left[ \int_0^\infty \left\{ \int_{-M}^M \sin^2 [u(t-x)/2] f''(t) dt \right\} \frac{du}{u^2} \right] f(x) dx \end{aligned}$$

Posons  $\forall u > 0 \quad \forall x \in [-M, M]$

$$K(u, x) = \frac{1 + u^{3/2}}{u^2} \int_{-M}^M \sin^2 [u(t-x)/2] f''(t) dt ;$$

$\forall u \in ]0, 1[ \quad \forall x \in [-M, M] \quad$  on a  $|K(u, x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-M}^M (t-x)^2 |f''(t)| dt$

$\leq 2M^2 \|f''\|_1 ;$  de même  $\forall u > 1 \quad \forall x \in [-M, M] \quad$  on a  $|K(u, x)| \leq 2 \|f''\|_1 ;$

donc  $K$  est borné dans  $\mathbb{R}_*^+ \times [-M, M].$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit} \quad \|f\|_2^2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-M}^M \left[ \int_0^\infty K(u, x) \frac{du}{1 + u^{3/2}} \right] f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-M}^M K(u, x) f(x) dx \right] \frac{du}{1 + u^{3/2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-M}^M \left\{ \int_{-M}^M \sin^2 [u(t-x)/2] f''(t) dt \right\} f(x) dx \right] \frac{du}{u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-M}^M \left\{ \int_{-M}^M \cos [u(t-x)] f(t) dt \right\} f(x) dx \right] du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-M}^M \cos(ut) f(t) dt \int_{-M}^M \cos(ux) f(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-M}^M \sin(ut) f(t) dt \int_{-M}^M \sin(ux) f(x) dx \right] du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ (Af)^2(u) + (Bf)^2(u) \right] du = \frac{1}{2\pi} \left( \|Af\|_2^2 + \|Bf\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

6.6. Théorème :

Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  ; soit  $f_n \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$  avec  $f_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$  ; alors  $Af_n$  et  $Bf_n$  convergent dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  vers une limite indépendante de la suite particulière  $f_n$ .

Dém : On applique le théorème précédent.

Notation provisoire :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on pose

$$\boxed{A'\tilde{f} = {}^2\lim_n (Af_n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \boxed{B'\tilde{f} = {}^2\lim_n (Bf_n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

6.7. Définition :  $\forall h \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on pose  $\|h\|_{u,2} = \|h\| + \|h\|_2$ .

6.8. Théorème :  $(\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{u,2})$  est un espace de Riesz-Banach.

Dém : Il suffit de montrer que  $\mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{u,2}$ . Soit  $f_n \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  une suite de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{u,2}$  ; comme  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{u,2}$  et  $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{u,2}$ ,  $f_n$  est aussi une suite de Cauchy pour  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_2$  ; donc  $f_n \xrightarrow{u} g \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$  et  $f_n \xrightarrow{2} \tilde{h} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Soit  $k \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$  ; on a  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(k) - g(k)| \leq \|f_n - \tilde{g}\| \|k\|_1$  et  $|f_n(k) - \tilde{h}(k)| \leq \|f_n - \tilde{h}\|_2 \|k\|_2$  ; donc  $f_n(k) \rightarrow g(k)$  et  $f_n(k) \rightarrow \tilde{h}(k)$  ; on en déduit  $g = \tilde{h}$  et  $\|f_n - g\|_{u,2} = \|f_n - g\| + \|f_n - g\|_2 \rightarrow 0$ , donc  $f_n \xrightarrow{u,2} g$ .

6.9. Théorème :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on a  $A'\tilde{f} = Af \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et  $B'\tilde{f} = Bf \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

Dém :

Soit  $\varepsilon > 0$  ; soit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\int_{|t| \geq N} |\tilde{f}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\int_{|t| \geq N} \tilde{f}(t)^2 dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ; soit  $g \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$  nulle en dehors de  $[-N, N]$  telle que  $\int_{-N}^N |\tilde{f} - g|^2 dt \leq \frac{\varepsilon^2}{8N}$  ;

on a donc  $\int_{-N}^N |\tilde{f} - g| dt \leq \sqrt{2N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{8N}} = \frac{\varepsilon}{2}$  ;

on en déduit  $\|\tilde{f} - g\|_1 = \int_{-N}^N |\tilde{f} - g| dt + \int_{|t| \geq N} |\tilde{f}(t)| dt \leq \varepsilon$

et  $\|\tilde{f} - g\|_2^2 = \int_{-N}^N |\tilde{f} - g|^2 dt + \int_{|t| \geq N} \tilde{f}(t)^2 dt \leq \frac{\varepsilon^2}{8N} + \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \varepsilon^2$  ;

donc  $\|\tilde{f} - g\|_2 \leq \varepsilon$ .

On peut donc construire une suite  $g_n \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$  telle que  $g_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$  et  $g_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$  ;

on a donc  $A g_n \xrightarrow{u} A\tilde{f}$  et  $A g_n \xrightarrow{2} A'\tilde{f}$  ; donc  $A\tilde{f} = A'\tilde{f}$ .

Notation définitive :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on peut donc poser  $A\tilde{f} = A'\tilde{f}$  et  $B\tilde{f} = B'\tilde{f}$ .

6.10.\* Théorème :  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on a  $\boxed{\|A\tilde{f}\|_2^2 + \|B\tilde{f}\|_2^2 = 2\pi \|\tilde{f}\|_2^2}$ .

6.11. Corollaire :  $\|A\|_2 = \|B\|_2 = \sqrt{2\pi}$ .

Dém : Si  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est paire on a  $B\tilde{f} = 0$ , donc  $\|A\tilde{f}\|_2^2 = 2\pi \|\tilde{f}\|_2^2$ .

6.12. Définition : On pose  $\boxed{T = A + B}$  ; c'est un endomorphisme de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  ;

$\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  on appelle  $T\tilde{f}$  la transformée réelle de Fourier de  $\tilde{f}$ .

6.13.\* Théorème : 1)  $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$   $\boxed{\|T\tilde{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\tilde{f}\|_2}$

2)  $\boxed{AB = BA = 0}$

3)  $\boxed{T^2 = A^2 + B^2 = 2\pi I}$ .

6.14.\* Théorème : A, B, T sont des endomorphismes symétriques de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

6.15. Définition :  $\boxed{T = A + B}$  est aussi un morphisme linéaire  $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$  ;

$T\tilde{\mu}$  est la transformée réelle de Fourier de  $\tilde{\mu}$ .

On a donc  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$   $\boxed{(T\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} [\cos(xt) + \sin(xt)] \tilde{\mu}(t) dt}$ .

6.16. Théorème : Soient  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  ; alors on a

$$\boxed{\tilde{\mu}(A\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(A\tilde{\mu})} \quad \boxed{\tilde{\mu}(B\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(B\tilde{\mu})} \quad \boxed{\tilde{\mu}(T\tilde{\nu}) = \tilde{\nu}(T\tilde{\mu})}.$$

Dém : Comme  $A\tilde{\mu}, B\tilde{\mu} \dots \in \mathcal{C}_B^U(\mathbb{R})$ , les expressions ci-dessus ont un sens ; les égalités résultent d'une interversion des signes intégraux.

6.17. Théorème : Soient  $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  et  $f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$  ; alors on a

$$\boxed{\langle A\tilde{\mu}, Af \rangle + \langle B\tilde{\mu}, Bf \rangle = 2\pi\tilde{\mu}(f)} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle A\tilde{\mu}, Bf \rangle = \langle B\tilde{\mu}, Af \rangle = 0}.$$

Dém :

$$\begin{aligned} 1) \quad 2\pi\tilde{\mu}(f) &= \tilde{\mu}[(A^2 + B^2)f] = \tilde{\mu}[A(Af)] + \tilde{\mu}[B(Bf)] \\ &= \langle A\tilde{\mu}, Af \rangle + \langle B\tilde{\mu}, Bf \rangle. \end{aligned}$$

$$2) \quad A\tilde{\mu} \text{ est paire et } Bf \text{ est impaire, donc } \langle A\tilde{\mu}, Bf \rangle = 0.$$

6.18.\* Corollaire :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $[(A\tilde{\mu} = 0 \text{ et } B\tilde{\mu} = 0) \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0]$ .

6.19.\* Théorème :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \quad \forall f \in \mathcal{R}_O^{(2)}(\mathbb{R})$  on a  $\boxed{\langle T\tilde{\mu}, Tf \rangle = 2\pi\tilde{\mu}(f)}$ .

6.20.\* Corollaire :  $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$  on a  $[T\tilde{\mu} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 0]$ .

## § 7. Transformée complexe de Fourier

On est amené à utiliser des espaces de mesures et de fonctions à valeurs complexes ; nous les noterons  $\widehat{\mathcal{M}}^\bullet(\mathbb{R})$ , etc...

7.1. Définition : On pose  $\boxed{Z = A + iB}$  et  $\boxed{Z^\# = A - iB}$  ; on a donc

$$\forall \tilde{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}^\bullet(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad Z(\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \tilde{\mu}(t) \quad \text{et} \quad Z^\#(\tilde{\mu})(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \tilde{\mu}(t) ;$$

$Z$  et  $Z^\#$  sont naturellement aussi définis en tant qu'opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R})$ .

$Z$  et  $Z^\#$  sont les transformées complexes (directe et réciproque) de Fourier.

7.2.\* Théorème : Dans  $\widehat{\mathcal{L}}^2(\mathbb{R})$  on a  $\boxed{ZZ^\# = Z^\#Z = 2\pi I}$ .

7.3. Lemme :  $\forall z \in \mathbb{C}$  on a  $\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{zt-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{z^2/2}}$ .

Dém : Posons  $\forall z \in \mathbb{C}$   $f(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zt-t^2/2} dt$  ; en vertu du théorème d'holomorphic,  $f$  est analytique dans  $\mathbb{C}$  ; par ailleurs  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{xt-t^2/2} dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2-(t-x)^2/2} dt = e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-x)^2/2} dt = e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \\ &= \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} ; \text{ donc } \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sqrt{2\pi} e^{z^2/2}. \end{aligned}$$

7.4. Théorème :  $\boxed{Z(e^{-X^2/2}) = A(e^{-X^2/2}) = \sqrt{2\pi} e^{-X^2/2}}$ .

Dém :

$$\begin{aligned} A(e^{-X^2/2})(x) &= \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt-t^2/2} dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt-t^2/2} dt \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

7.5. Définition :  $\forall n \in \mathbb{N}$  on pose  $\boxed{H_n(X) = (-1)^n e^{X^2/2} \partial^n(e^{-X^2})}$ .

Les fonctions  $H_n$  sont les fonctions de Hermite ; elles sont égales aux polynômes de Hermite multipliés par  $e^{-X^2/2}$ .

7.6. \* Théorème :  $\forall \ell \in \mathbb{N}$   $H_{2\ell}$  est une fonction paire et  $H_{2\ell+1}$  une fonction impaire.

7.7. Théorème :  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $\boxed{H_{n+1} = X \cdot H_n - (H_n)'}$ .

$$\begin{aligned} \text{Dém} : X \cdot H_n - (H_n)' &= (-1)^n X e^{X^2/2} \partial^n(e^{-X^2}) - (-1)^n X e^{X^2/2} \partial^n(e^{-X^2}) \\ &- (-1)^n e^{X^2/2} \partial^{n+1}(e^{-X^2}) = (-1)^{n+1} e^{X^2/2} \partial^{n+1}(e^{-X^2}) = H_{n+1}. \end{aligned}$$

7.8. Théorème :  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $\boxed{Z(H_n) = i^n \sqrt{2\pi} H_n}$ .

Dém : Par récurrence sur  $n$ .

- 1) vrai pour  $n = 0$
- 2) supposons vrai pour  $n$
- 3) démontrons vrai pour  $n + 1$  :

$$Z(H_{n+1})(x) = \int_{\mathbb{R}} H_{n+1}(t) e^{ixt} dt = \int_{\mathbb{R}} t H_{n+1}(t) e^{ixt} dt - \int_{\mathbb{R}} H'_{n+1}(t) e^{ixt} dt$$

$$\begin{aligned}
&= -i \left( \int_{\mathbb{R}} H_n(t) e^{ixt} dt \right)' + ix \int_{\mathbb{R}} H_n(t) e^{ixt} dt = -i [Z(H_n)(x)]' + ix Z(H_n)(x) \\
&= i^{n+1} \sqrt{2\pi} [x H_n(x) - (H_n)'(x)] = i^{n+1} \sqrt{2\pi} H_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

7.9.\* Corollaire :  $\forall \ell \in \mathbb{N}$  on a  $A(H_{2\ell}) = (-1)^\ell \sqrt{2\pi} H_{2\ell}$

$$\text{et } B(H_{2\ell+1}) = (-1)^\ell \sqrt{2\pi} H_{2\ell+1}.$$

7.10.\* Corollaire :  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $\boxed{T(H_n) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \sqrt{2\pi} H_n}$ .

## § 8. Inégalité de Jensen dans $\mathbb{R}^n$

Théorème : On se donne un convexe fermé  $A \subset \mathbb{R}^n$  (non vide et non réduit à un point), une probabilité  $\tilde{\mu}$  sur  $A$  et une fonction  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  convexe, continue et sommable pour  $\tilde{\mu}$ ; alors on a

$$\boxed{\Phi \left[ \int_A x \tilde{\mu}(x) \right] \leq \int_A \Phi(x) \tilde{\mu}(x)}.$$

Dém : Nous faisons la démonstration dans  $\mathbb{R}^2$ , la généralisation étant évidente.

Supposons d'abord  $A$  borné. Considérons  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  le quadrillage canonique de longueur  $\frac{1}{n}$  et soit  $\mathcal{S}_n$  la famille de parties de  $\mathbb{R}^2$  formée des sommets, des arêtes *ouvertes* et des carrés *ouverts* du quadrillage.

Posons  $u = \int_A x \tilde{\mu}(x) \in \mathbb{R}^2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $x_n = \sum_{T \in \mathcal{S}_n} x_T \tilde{\mu}(A \cap T) \in \mathbb{R}^2$

avec  $\forall T \in \mathcal{S}_n$   $x_T \in T$ . On a  $\sum_{T \in \mathcal{S}_n} \tilde{\mu}(A \cap T) = 1$ , donc  $x_n \in A$

et  $\Phi(x_n) \leq \sum_{T \in \mathcal{S}_n} \Phi(x_T) \tilde{\mu}(A \cap T)$ . Comme la fonction  $x \mapsto x$  et la fonction  $\Phi$

sont continues, les "séries de Riemann"  $\sum_{T \in \mathcal{S}_n} x_T \tilde{\mu}(A \cap T)$  et  $\sum_{T \in \mathcal{S}_n} \Phi(x_T) \tilde{\mu}(A \cap T)$  convergent respectivement vers  $u = \int_A x \tilde{\mu}(x)$  et  $\int_A \Phi(x) \tilde{\mu}(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ;

on en déduit  $u \in A$  et  $\Phi(u) \leq \int_A \Phi(x) \tilde{\mu}(x)$ .

Supposons  $A$  non borné, on considère alors la suite  $A_n = A \cap D_n$ , où  $D_n$  est le disque fermé, centré à l'origine, de rayon  $n$ .  $A_n$  est un convexe compact et on a  $\bigcup_n A_n = A$ ;

on peut alors écrire  $\forall n \in \mathbb{N}$   $\Phi \left[ \frac{1}{\tilde{\mu}(A_n)} \int_{A_n} x \tilde{\mu}(x) \right] \leq \frac{1}{\tilde{\mu}(A_n)} \int_{A_n} \Phi(x) \tilde{\mu}(x)$ ; il suffit ensuite de prendre la limite pour  $n \rightarrow +\infty$ .

