DEUXIEME PARTIE

Intégration sur $\mathbb{R}$

CHAPITRE XII

PSEUDO-MESURES , MESURES , FONCTIONNELLES SUR $\mathbb{R}$

Nous étendons à $\mathbb{R}$ les concepts et les théorèmes déjà définis et démontrés sur $[a,b]$. La plupart des théorèmes constituent des généralisations évidentes de résultats précédents et leurs démonstrations sont laissées au lecteur.

§ 0. Notations

A. Algèbres de fonctions

$\mathcal{E}(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étagées (= localement étagées)

$\mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étagées bornées

$\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étagées à support borné

Idem pour $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$.

$\mathcal{W}(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ universelles (= localement universelles)

$\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ universelles bornées

$\mathcal{W}_O(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ universelles à support borné

$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement bornées

$\mathcal{F}_B(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées

$\mathcal{F}_O(\mathbb{R})$ = algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées à support borné

Remarque : Toutes ces algèbres sont des algèbres de Riesz.

B. Normes , semi-normes , convergences.

$\forall f \in \mathcal{F}_B(\mathbb{R})$ on pose $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

$\forall f \in \mathcal{W}_O(\mathbb{R})$ on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ et $\|f\|_2 = \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\,dx\right]^{1/2}$.

On dit que $f \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$ est <u>sommable</u> (ou <u>intégrable</u>) ssi

$$\boxed{\|f\|_1 = \sup_n \int_{-n}^{n} |\, f(x, y) \,|\; dx < +\infty}\;.$$

Si $f \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$ est sommable, on note $\boxed{\int_{\mathrm{I\!R}} f(x)\; dx = \lim_n \int_{-n}^{n} f(x, y)\; dx}$.

Dans $\mathcal{F}(\mathrm{I\!R})$ on note $f_n \overset{\circ}{\to} f$ ssi f_n converge <u>simplement</u> (ou <u>ponctuellement</u>) vers f sur $\mathrm{I\!R}$, c-à-d ssi $\boxed{\forall\, c \in \mathrm{I\!R} \quad f_n(c) \to f(c)}$.

Dans $\mathcal{F}_B(\mathrm{I\!R})$ on note :

1) $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$ ssi f_n converge simplement vers f sur $\mathrm{I\!R}$ et ssi la suite $\|\, f_n \|$ est bornée ; c'est la convergence <u>bornée</u>.

2) $f_n \overset{\mathbf{u}}{\to} f$ ssi f_n converge <u>uniformément</u> vers f sur $\mathrm{I\!R}$, c-à-d ssi $\|\, f_n - f \,\| \to 0$.

C. <u>Restriction d'une forme linéaire sur $\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$</u>.

$\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^*$ on pose $\mathrm{I}_k = [-k\,,\, k\,]$; soit $h \in \mathcal{E}(\mathrm{I}_k)$; on identifie h et la fonction de $\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ égale à h dans I_k et à 0 dans $\mathrm{I\!R} - \mathrm{I}_k$.

Soit $\tilde{f}$ une forme linéaire sur $\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$; on note $\tilde{f}_{[k]}$ la forme linéaire sur $\mathcal{E}(\mathrm{I}_k)$ définie par $\boxed{\tilde{f}_{[k]} \,:\, \mathcal{E}(\mathrm{I}_k) \to \mathrm{I\!R} \,:\, h \mapsto \tilde{f}(h)}$; on appelle $\tilde{f}_{[k]}$ la <u>restriction</u> de $\tilde{f}$ à I_k.

§ 1. <u>Pseudo-mesures et mesures sur $\mathrm{I\!R}$</u>

1.1. <u>Définition</u> : Une <u>pseudo-mesure</u> sur $\mathrm{I\!R}$ est une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ telle que $\boxed{\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^* \quad \tilde{f}_{[k]} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures sur $\mathrm{I\!R}$.

1.2. <u>Théorème</u> : Tout $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ s'étend naturellement à $\mathcal{R}_O(\mathrm{I\!R})$.

1.3. <u>Définition</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ on pose $\boxed{\tilde{f} \le \tilde{g} \quad \text{ssi} \quad \forall\, k \in \mathrm{I\!N}^* \quad \tilde{f}_{[k]} \le \tilde{g}_{[k]}}$.

1.4. <u>Définition</u> : La suite $\tilde{f}_k \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}_k)$ est <u>inductive</u> ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\tilde{f}_k$ est la restriction de $\tilde{f}_{k+1}$ à I_k, c-à-d ssi $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\big(\tilde{f}_{k+1}\big)_{[k]} = \tilde{f}_k$. Une suite inductive $\tilde{f}_k$ définit de manière naturelle un élément $\tilde{f}$ de $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$, appelé <u>limite inductive</u> de $\tilde{f}_k$ et noté $\boxed{\tilde{f} = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \tilde{f}_k}$; on a alors $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\tilde{f}_{[k]} = \tilde{f}_k$.

1.5. <u>Définition</u> :

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$; alors la suite $\big|\tilde{f}_{[k]}\big|$ est inductive et on pose $\boxed{\big|\tilde{f}\,\big| = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \big|\tilde{f}_{[k]}\big|}$.

<u>Notation</u> : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\boxed{\mathsf{X}_k = \mathbb{1}_{[-k\,,\,k]}} \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$.

1.6. <u>Définition</u> :

Soient $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$; alors la suite $\big(\mathsf{X}_k\, g\big)\, \tilde{f}_{[k]} \in \mathcal{PM}(\mathrm{I}_k)$ est inductive ; on pose $\boxed{g\,\tilde{f} = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \big(\mathsf{X}_k\, g\big)\, \tilde{f}_{[k]}} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$.

1.7. <u>Définition</u> : $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ est une <u>mesure</u> ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{[k]} \in \mathcal{M}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des mesures sur $\mathbb{R}$.

1.8. <u>Théorème</u> : Tout $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ s'étend naturellement à $\mathcal{W}_O(\mathbb{R})$.

1.9. <u>Définition</u> : Soient $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$; alors la suite $\big(\mathsf{X}_k\, g\big)\, \tilde{f}_{[k]} \in \mathcal{M}(\mathrm{I}_k)$ est inductive ; on pose $\boxed{g\,\tilde{f} = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \big(\mathsf{X}_k\, g\big)\, \tilde{f}_{[k]}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

1.10. <u>Définition</u> : $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est une mesure <u>diffuse</u> ssi $\boxed{\forall\, c \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}\big(1_{\{c\}}\big) = 0}$.

On note $\mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des mesures diffuses sur $\mathbb{R}$.

1.11. <u>Théorème - Définition</u> :

$\forall f \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ la forme linéaire $\boxed{\{f\} \ :\ \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ :\ g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g\, f\, dx}$ est une mesure, appelée la mesure <u>associée</u> à f.

En particulier à la fonction constante $\boxed{\mathbb{1} = 1_{\mathbb{R}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})}$ est associée la mesure $\boxed{\{\mathbb{1}\} \ :\ \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ :\ g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g\, dx}$; c'est la $\boxed{\text{mesure de Lebesgue}}$.

On note $\underline{\mathcal{W}}(\mathrm{I\!R}) = \big\{\{f\} \,\big\|\, f \in \mathcal{W}(\mathrm{I\!R})\big\}$; c'est un sous-espace de $\mathcal{M}(\mathrm{I\!R})$; on utilise une notation analogue pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$.

Remarque : Nous verrons plus loin que $\forall f \in \mathcal{R}$ la mesure $\{f\}$ est de fait une *fonctionnelle localement bornée*. Nous parlerons donc de $\{f\}$ comme étant la fonctionnelle associée à f, plutôt que la mesure associée à f.

Dans la pratique on remplacera communément la notation $\{f\}$ par la notation f.

1.12. Définition : $\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est normée ssi $\boxed{\big\|\tilde f\big\|_\star = \sup\limits_k \big\|\tilde f_{[k]}\big\|_\star < +\infty}$.

On note $\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R}) = \big\{\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R}) \,\big\|\, \tilde f \text{ normée} \big\}$,

$$\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) = \big\{\, \tilde f \in \mathcal{M}(\mathrm{I\!R}) \,\big\|\, \tilde f \text{ normée} \big\}, \quad \mathcal{M}^\bullet_D(\mathrm{I\!R}) = \big\{\, \tilde f \in \mathcal{M}_D(\mathrm{I\!R}) \,\big\|\, \tilde f \text{ normée} \big\}.$$

1.13. Définition : $\tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})^+$ est une (mesure de) probabilité sur $\mathrm{I\!R}$ ssi $\big\|\tilde f\big\|_\star = 1$.

On note $\mathcal{P}(\mathrm{I\!R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathrm{I\!R}$ et $\mathcal{P}_D(\mathrm{I\!R})$ l'ensemble des mesures de probabilité diffuses sur $\mathrm{I\!R}$.

1.14. Théorème : $\boxed{\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}), \|\ \|\big)}$.

1.15. Théorème de Riesz-Radon :

$$\boxed{\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \text{ est isométrique au N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{C}_O(\mathrm{I\!R}), \|\ \|\big)}.$$

1.16. Définition : Convergence en norme $\|\ \|_\star$

$\forall\, \tilde f_n, \tilde f \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ on écrit $\tilde f_n \xrightarrow{\star} \tilde f$ $\big($ou $\tilde f = {}^\star\lim\limits_n \tilde f_n\big)$ ssi $\big\|\tilde f_n - \tilde f\big\|_\star \to 0$.

1.17. Théorème : $\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{M}^\bullet_D(\mathrm{I\!R})$ sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$.

1.18. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$

Soit $\tilde f_n \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathrm{I\!N}$ $\big\|\tilde f_n\big\|_\star \le M$; alors $\tilde f_n$ converge en norme $\|\ \|_\star$ vers une pseudo-mesure $\tilde f \in \mathcal{PM}^\bullet(\mathrm{I\!R})$; on a donc aussi $\lim\limits_n \big\|\tilde f_n\big\|_\star = \big\|\tilde f\big\|_\star$.

1.19. <u>Théorème</u> : Soit $f \in \mathcal{F}_B(\mathrm{I\!R})$; alors $f \in \mathcal{PR}_B(\mathrm{I\!R})$ ss'il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f$.

1.20. <u>Théorème</u> : Soit $f \in \mathcal{F}_B(\mathrm{I\!R})$; alors $f \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$ ssi

$$\boxed{\forall\, \tilde\mu \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})^+ \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe } \ g, h \in \mathcal{PR}_B(\mathrm{I\!R}) \ \text{ tels que } \ g \le f \le h \ \text{ et } \ \tilde\mu\,(h-g) \le \varepsilon}\,.$$

1.21. <u>Théorème</u> : $\mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{M}^\bullet_D(\mathrm{I\!R})$ sont des espaces de Riesz-Banach et des modules de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$.

1.22. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \ \ \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$ la suite $\tilde f\big(\mathsf{X}_k\, g\big)$ est convergente.

<u>Dém</u> : Supposons d'abord $\tilde f \ge 0$ et $g \ge 0$; alors la suite $\mathsf{X}_k\, g$ est positive et croissante ; de plus $\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^* \ \ 0 \le \tilde f\big(\mathsf{X}_k\, g\big) \le \big\|\tilde f\big\|_\star \|g\|$; la suite $\tilde f\big(\mathsf{X}_k\, g\big)$ est donc croissante et majorée, donc convergente. Pour $\tilde f$ et g quelconques on a
$\tilde f\big(\mathsf{X}_k\, g\big) = \tilde f^+\big(\mathsf{X}_k\, g^+\big) - \tilde f^+\big(\mathsf{X}_k\, g^-\big) - \tilde f^-\big(\mathsf{X}_k\, g^+\big) + \tilde f^-\big(\mathsf{X}_k\, g^-\big)$,
qui est donc aussi une suite convergente.

1.23. <u>Définition</u> : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \ \ \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$ $\boxed{\tilde f(g) = \lim\limits_{k \to +\infty} \tilde f\big(\mathsf{X}_k\, g\big)}$.

1.24. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \ \ \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$ on a $\big|\tilde f(g)\big| \le \big\|\tilde f\big\|_\star \|g\|$.

<u>*Notation intégrale*</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathrm{I\!R}) \ \ \forall\, g \in \mathcal{W}_B(\mathrm{I\!R})$ on note

$$\boxed{\int_{\mathrm{I\!R}} g(x)\, \tilde f(x) = \int_{\mathrm{I\!R}} g\, \tilde f = \tilde f(g)}\,.$$

§ 2. <u>Pseudo-mesures paires et impaires</u>

2.1. <u>Définition</u> : $\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est <u>paire</u> ssi $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ *impaire* on a $\tilde f(h) = 0$;
$\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est <u>impaire</u> ssi $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ *paire* on a $\tilde f(h) = 0$.

2.2. <u>Théorème</u> : On pose $\forall\, h \in \mathcal{F}(\mathrm{I\!R}) \ \ h^\bullet(x) = h(-x)$; alors $\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est paire (resp. impaire) ssi $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R}) \ \ \tilde f(h^\bullet) = \tilde f(h)$ $\big[$resp. $\tilde f(h^\bullet) = -\tilde f(h)\big]$.

<u>Dém</u> : $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ on a $h = \frac12 (h + h^\bullet) + \frac12 (h - h^\bullet)$; donc si $\tilde f$ est paire on a $\forall\, h \in \mathcal{E}(\mathrm{I\!R}) \ \ \tilde f(h) = \frac12 \big[\tilde f(h) + \tilde f(h^\bullet)\big]$, donc $\tilde f(h^\bullet) = \tilde f(h)$.

Réciproquement soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ tel que $\forall\, h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ $\tilde{f}(h^\bullet) = \tilde{f}(h)$;
soit $h \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ impaire ; alors on a $h = \frac{1}{2}(h - h^\bullet)$, donc $\tilde{f}(h) = 0$, donc $\tilde{f}$ est paire.

§ 3. Fonctionnelles localement sommables sur $\mathbb{R}$

3.1. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle localement sommable ssi

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{[k]} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}_k)}\,.$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles localement sommables.

3.2. Théorème : $\mathcal{W}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

3.3. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est sommable (ou intégrable) ssi

$$\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \sup_k \|\tilde{f}_{[k]}\|_1 < +\infty}\,.$$

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles sommables.

Notation intégrale : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on note $\boxed{\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\, dx = \tilde{f}(\mathbb{1})}$ $\big(\mathbb{1} = 1_{\mathbb{R}}\big)$.

3.4. Définition : Convergence en norme $\|\ \|_1$

$\forall\, \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$ $\big($ou $\tilde{f} = {}^1\lim_n \tilde{f}_n\big)$ ssi $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_1 \to 0$.

3.5. Théorème : $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est la fermeture de $\mathcal{E}_O(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{C}_O(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$;
c'est un espace de Riesz-Banach.

3.6. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\|\tilde{f}_n\|_1 \le M$; alors $\tilde{f}_n$ converge en norme $\|\ \|_1$ vers une fonctionnelle $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$;
on a donc aussi $\lim_n \|\tilde{f}_n\|_1 = \|\tilde{f}\|_1$.

3.7. Théorème : $\mathcal{W}_O(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$.

§ 4. Fonctionnelles localement hilbertiennes sur $\mathbb{R}$

4.1. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle localement hilbertienne ssi

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \tilde{f}_{[k]} \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}_k)}\,.$$

On note $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles localement hilbertiennes.

4.2. Théorème : $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

Sur $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ on définit le produit de deux éléments de la manière suivante :

4.3. Définition : Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$; la suite $\tilde{f}_{[k]}\, \tilde{g}_{[k]} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}_k)$ est inductive ;

on peut donc poser $\boxed{\tilde{f}\,\tilde{g} \;=\; \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\;\; \tilde{f}_{[k]}\, \tilde{g}_{[k]}} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$.

4.4. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est hilbertienne ssi $\boxed{\big\|\,\tilde{f}\,\big\|_2 = \sup\limits_k \big\|\,\tilde{f}_{[k]}\big\|_2 < +\infty}$.

On note $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctionnelles hilbertiennes.

4.5. Théorème : $\boxed{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}_O(\mathbb{R})\,,\, \|\;\|_2\big)}$.

4.6. Définition : Convergence en norme $\|\;\|_2$

$\forall\, \tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on écrit $\tilde{f}_n \overset{2}{\to} \tilde{f}$ $\big($ou $\tilde{f} \,=\, {}^2\lim\limits_n\, \tilde{f}_n\big)$ ssi $\big\|\,\tilde{f}_n - \tilde{f}\,\big\|_2 \to 0$.

4.7.* Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\big\|\,\tilde{f}_n\big\|_2 \leq M$; alors $\tilde{f}_n$ converge en norme $\|\;\|_2$ vers une fonctionnelle $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; on a donc aussi $\lim\limits_n \big\|\,\tilde{f}_n\big\|_2 = \big\|\,\tilde{f}\,\big\|_2$.

4.8. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\big\|\,\tilde{f}\,\big\|_2^2 \,=\, \big\|\,\tilde{f}^{\,2}\big\|_1$.

4.9. Théorème : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a $\tilde{f}\,\tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\big\|\,\tilde{f}\,\tilde{g}\big\|_1 \,\leq\, \big\|\,\tilde{f}\,\big\|_2\, \|\,\tilde{g}\,\|_2$.

4.10. Théorème : On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \boxed{\big\langle\, \tilde{f}, \tilde{g}\,\big\rangle \,=\, \big(\tilde{f}\,\tilde{g}\big)\,(\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\,\tilde{g}\; dx}\,.$$

4.11.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ $\forall\, g \in \mathcal{R}_O(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\big\langle\, \tilde{f}, g\,\big\rangle = \tilde{f}\,(g)}$.

4.12. <u>Théorème</u> : $\big(\mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})\,,\,\langle\ ,\ \rangle\big)$ est un espace de Riesz-Hilbert.

4.13. <u>Théorème</u> : $\mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{C}_O(\mathrm{I\!R})$ sont denses dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})$.

4.14. <u>Définition</u> : $\forall\,\tilde f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})$ on pose $\|\tilde f\|_{1,2} = \|\tilde f\|_1 + \|\tilde f\|_2$.

4.15. <u>Théorème</u> : $(\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})\,,\ \|\ \|_{1,2})$ est un espace de Riesz-Banach.

<u>Dém</u> : Il suffit de montrer que $\mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})$ est complet pour la norme $\|\ \|_{1,2}$. Soit $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})$ une suite de Cauchy pour $\|\ \|_{1,2}$; comme $\|\ \|_1 \le \|\ \|_{1,2}$ et $\|\ \|_2 \le \|\ \|_{1,2}$, $\tilde f_n$ est aussi une suite de Cauchy pour $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$; donc $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde g \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I\!R})$ et $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde h \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})$. Soit $k \in \mathcal{E}_O(\mathrm{I\!R})$; on a $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$ $\big|\tilde f_n(k) - \tilde g(k)\big| \le \|\tilde f_n - \tilde g\|_1 \|k\|$ et $\big|\tilde f_n(k) - \tilde h(k)\big| \le \|\tilde f_n - \tilde h\|_2 \|k\|_2$; donc $\tilde f_n(k) \to \tilde g(k)$ et $\tilde f_n(k) \to \tilde h(k)$; on en déduit $\tilde g = \tilde h$ et $\|\tilde f_n - \tilde g\|_{1,2} = \|\tilde f_n - \tilde g\|_1 + \|\tilde f_n - \tilde g\|_2 \to 0$; donc $\tilde f_n \xrightarrow{1,2} \tilde g$.

§ 5. <u>Fonctionnelles localement bornées sur $\mathrm{I\!R}$</u>

5.1. <u>Définition</u> :

$\tilde f \in \mathcal{PM}(\mathrm{I\!R})$ est une <u>fonctionnelle localement bornée</u> ssi $\boxed{\forall\, k \in \mathrm{I\!N}^* \quad \tilde f_{[k]} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_k)}$.

On note $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ l'algèbre des fonctionnelles localement bornées.

5.2. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R}) \subset \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$.

5.3. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{W}(\mathrm{I\!R}) = \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ est une algèbre de Riesz.

5.4. <u>Théorème</u> : 1) $\mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ et $\mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$.
2) $\mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ est un algébromodule de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathrm{I\!R})$.

5.5. <u>Définition</u> :

Soient $\tilde f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ et $\tilde g \in \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$; alors la suite $\tilde f_{[k]}\,\tilde g_{[k]} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}_k)$ est inductive ; on pose $\boxed{\tilde f\,\tilde g = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \tilde f_{[k]}\,\tilde g_{[k]}} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$.

5.6. <u>Définition</u> : $\tilde f \in \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{I\!R})$ est <u>bornée</u> ssi $\boxed{\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} = \sup_k \|\tilde f_{[k]}\|_{\mathrm{B}} < +\infty}$.

On note $\mathcal{B}(\mathrm{I\!R})$ l'algèbre des fonctionnelles bornées.

5.7. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \left(\mathcal{E}_O(\mathbb{R}), \|\ \|_1\right)}$.

5.8. <u>Théorème</u> :

$\tilde{f} \in \mathcal{B}_{\text{Loc}}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle bornée ss'il existe $M > 0$ tel que $\left|\tilde{f}\right| \leq M$.

5.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\left\|\tilde{f}\,\tilde{g}\right\|_{\mathrm{B}} \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{\mathrm{B}} \|\tilde{g}\|_{\mathrm{B}}$.

5.10. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $\left\|\tilde{f}\,\tilde{g}\right\|_1 \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{\mathrm{B}} \|\tilde{g}\|_1$.

5.11. <u>Théorème</u> : $\boxed{\underline{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une algèbre de Riesz-Banach.

5.12. <u>Théorème</u> : 1) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un algébromodule de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$.

5.13. <u>Théorème</u> :

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et on a $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\left\|\tilde{f}\right\|_2^2 \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{\mathrm{B}} \left\|\tilde{f}\right\|_1$.

5.14. <u>Théorème</u> :

L'application $\boxed{\mathcal{W}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_{\text{Loc}}(\mathbb{R}) \ :\ f \mapsto \{f\}}$ est un <u>algébromorphisme de Riesz</u>.

5.15. <u>Corollaire</u> : $\boxed{\forall\, f, g \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \quad \{f\,g\} = \{f\}\,\{g\} = f . \{g\}}$.

5.16. <u>Définition</u> :

On note $\mathcal{Z}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{W}(\mathbb{R}) \,\middle\|\, \{f\} = 0 \right\}$ et $\mathcal{Z}_B(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R}) \,\middle\|\, \{f\} = 0 \right\}$;

$\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ $\left[\text{resp. } \mathcal{Z}_B(\mathbb{R})\right]$ est l'espace des fonctions universelles (resp. universelles bornées) <u>nulles presque partout</u>.

5.17. <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ on a $\left[f \in \mathcal{Z}_B(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|\; dx = 0 \right]$.

5.18. <u>Théorème</u> :

$\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Z}_B(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces cohérents et intégraux de $\mathcal{W}(\mathbb{R})$;
de plus ce sont des idéaux respectivement de $\mathcal{W}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$; enfin on a

$$\boxed{\mathcal{B}_{\text{Loc}}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{W}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{W}_B(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_B(\mathbb{R})}.$$

§ 6. Fonctionnelles caractéristiques

6.1. Définition : $\tilde f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ est une fonctionnelle caractéristique ssi $\boxed{\tilde f^2 = \tilde f}$.

On note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctionnelles caractéristiques ; on a $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

6.2. Théorème : $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

On pose $\mathcal{EK}(\mathbb{R}) = \{\, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \,\|\, f^2 = f \,\} = \{\, f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) \,\|\, f^2 = f \,\}$.

6.3. Théorème : $\underline{\mathcal{EK}}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

6.4. Définition : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ la suite $\mathrm{S}\left(\tilde f_{[k]}\right) \in \mathcal{K}(\mathrm{I}_k)$ est inductive et on pose

$$\text{support de } \tilde f = \boxed{\mathrm{S}(\tilde f) = \underset{k}{\boldsymbol{Lim}}\ \mathrm{S}\left(\tilde f_{[k]}\right)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}).$$

6.5. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R})$ on a $\left[\ \mathrm{S}(\tilde f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \tilde f = 0\ \right]$.

6.6. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ on a $\left[\ \mathrm{S}(\tilde f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1} \wedge |\tilde f| = 0\ \right]$.

6.7. Définition : On note $\mathcal{N}(\mathbb{R}) = \{\, \tilde f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \,\|\, \mathbb{1} \wedge |\tilde f| = 0 \,\}$

et $\mathcal{N}^\bullet(\mathbb{R}) = \{\, \tilde f \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \,\|\, \mathbb{1} \wedge |\tilde f| = 0 \,\}$.

$\mathcal{N}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des mesures totalement singulières.

6.8. Théorème : $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ est un module de Riesz sur $\mathcal{W}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{N}^\bullet(\mathbb{R})$ est un espace de Riesz-Banach et un module de Riesz sur $\mathcal{W}_B(\mathbb{R})$.

6.9. Théorème de Radon-Nikodym :

$$\boxed{\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) \bigoplus \mathcal{N}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \bigoplus \mathcal{N}^\bullet(\mathbb{R})}.$$

Récapitulatif : (les flèches simples représentent des inclusions)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathcal{W}(\mathbb{R}) & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{B}_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_D(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}(\mathbb{R}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{W}_B(\mathbb{R}) & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{B}(\mathbb{R}) & & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R}) \\
\nearrow & & \uparrow & & \nwarrow & \nearrow & & & & & \\
\mathcal{W}_O(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow & & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & & & & & &
\end{array}$$

CHAPITRE XIII

THEOREMES CLASSIQUES

Théorème (de convergence bornée) de Lebesgue. Continuité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Théorème de Dieudonné : inversion de l'ordre d'intégration.

A. Théorème de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ("Convergence bornée")

Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\, \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$.

Dém : Généralisation élémentaire du théorème de Lebesgue sur $[a,b]$, la convergence fine étant définie de manière correspondante.

B. Théorème de continuité

Notation : Soient A, B, C trois ensembles et soit une fonction $f\ :\ \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathrm{C}$;

- $\forall\, a \in \mathrm{A}$ on pose $f(a\,,*)\ :\ \mathrm{B} \to \mathrm{C}\ :\ b \mapsto f(a\,,b)$
- $\forall\, b \in B$ on pose $f(*,\,b)\ :\ \mathrm{A} \to \mathrm{C}\ :\ a \mapsto f(a\,,b)$

Enoncé : Soit Ω un espace topologique ; on note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions continues $\Omega \to \mathbb{R}$; soit une fonction $\boxed{\text{bornée}}$ $f\ :\ \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

1°) $\forall\, \omega \in \Omega$ $\boxed{f(\omega\,,*) \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})}$ et 2°) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(*,\,t) \in \mathcal{C}(\Omega)}$;

soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; on pose $\forall\, \omega \in \Omega$ $\boxed{G(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\omega\,,t)\, \tilde{\mu}(t)}$;

alors on a $\boxed{G \in \mathcal{C}(\Omega)}$.

Dém : Soit $\omega \in \Omega$ et soit $\omega_n \in \Omega$, $\omega_n \to \omega$; on pose $g = f(\omega\,,*)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $g_n = f(\omega_n\,,*)$; on a $g_n \xrightarrow{b} g$, donc $\tilde{\mu}\,(g_n) \to \tilde{\mu}\,(g)$, c-à-d $G(\omega_n) \to G(\omega)$.

C. <u>Théorème de Dieudonné</u> (“Inversion de l'ordre d'intégration”)

Ce théorème généralise un procédé utilisé dans Dieudonné [10], Tome 2, p. 126.

<u>Enoncé</u> : Soit une fonction $\boxed{\text{bornée}}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

1°) $\forall s \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(s, *) \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})}$ <u>et</u> 2°) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(*, t) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})}$;

soient $\underline{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}_D(\mathbb{R})}$ et $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$; on pose

1°) $\forall s \in \mathbb{R}$ $\boxed{G(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s, t)\, \tilde{\nu}(t)}$ <u>et</u> 2°) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\boxed{H(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s, t)\, \tilde{\mu}(s)}$;

alors on a 1°) $\boxed{G \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})}$ <u>et</u> $\boxed{H \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})}$

2°) $\int_{\mathbb{R}} G(s)\, \tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} H(t)\, \tilde{\nu}(t)$, c-à-d

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(s, t)\, \tilde{\nu}(t) \Big]\, \tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(s, t)\, \tilde{\mu}(s) \Big]\, \tilde{\nu}(t)}\, .$$

<u>Dém</u> : Soit $s_\circ \in \mathbb{R}$; on pose $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) = \lim_{s \to s_\circ^-} f(s, t)$; on a $f(s, *) \xrightarrow{\text{b}} \varphi$ quand $s \to s_\circ^-$, donc $\varphi \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $G(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s, t)\, \tilde{\nu}(t) \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \tilde{\nu}(t)$;

donc G a une limite à gauche en $s_\circ$; de même G a une limite à droite en $s_\circ$,

donc G est réglée ; par ailleurs G est clairement bornée, donc $G \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall r \in [\![0, n]\!]$ on pose $a_{n,r} = -k + 2\,k\,r/n$,

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall r \in [\![0, n-1]\!]$ on choisit $c_{n,r} \in [\, a_{n,r}, a_{n,r+1}]$;

soit enfin $\phi \in \mathcal{CV}\big([-k, k]\big)$ une primitive de $\tilde{\mu}$ sur $[-k, k]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on construit les sommes de Riemann-Stieltjes

$$\Psi_n(t) = \textstyle\sum_{r=0}^{n-1} f(c_{n,r}, t) \big[\phi(a_{n,r+1}) - \phi(a_{n,r}) \big] ;$$

on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Psi_n \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Psi_n(t) \xrightarrow{\text{b}} \int_{-k}^{k} f(s, t)\, \tilde{\mu}(s) = H_k(t)$,

donc $H_k \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(t)\, \tilde{\nu}(t) \to \int_{\mathbb{R}} H_k(t)\, \tilde{\nu}(t)$; on a par ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_n(t)\,\tilde{\nu}(t) \;=\; \sum_{r=0}^{n-1} \left[\,\phi(a_{n,r+1}) - \phi(a_{n,r})\right] \int_{\mathbb{R}} f(c_{n,r}\,,\,t)\,\tilde{\nu}(t)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} G(c_{n,r})\left[\,\phi(a_{n,r+1}) - \phi(a_{n,r})\right] \;\to\; \int_{-k}^{k} G(s)\,\tilde{\mu}(s)\,.$$

On peut donc écrire $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_{-k}^{k} G(s)\,\tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,\tilde{\nu}(t)$; or $H_k \xrightarrow{\text{b}} H$ quand $k \to +\infty$; donc $H \in \mathcal{W}_B(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,\tilde{\nu}(t) \to \int_{\mathbb{R}} H(t)\,\tilde{\nu}(t)$;

on en déduit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} G(s)\,\tilde{\mu}(s) = \int_{\mathbb{R}} H(t)\,\tilde{\nu}(t)\,.$

D. Théorème d'holomorphie

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$; on note $\widehat{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions universelles bornées sur $\mathbb{R}$, *à valeurs complexes*, et $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur U ; soit une fonction $\boxed{\text{bornée}}$ $f\;:\;\mathrm{U}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

1°) $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{f(z\,,*) \in \widehat{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R})}$ et 2°) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\boxed{f(*\,,t) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})}$;

soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^{\bullet}(\mathbb{R})$; on pose $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{G(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(z\,,t)\,\tilde{\mu}(t)}$;

alors on a 1°) $\boxed{G \in \mathcal{H}(\mathrm{U})}$ et $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{\partial_1 f(z\,,*) \in \widehat{\mathcal{W}_B}(\mathbb{R})}$

2°) $\forall\, z \in \mathrm{U}$ $\boxed{G'(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(z\,,t)\,\tilde{\mu}(t)}$.

Dém :

1°) Soit $\gamma\;:\;\mathrm{I} \to \mathrm{U}$ un contour à dérivée réglée, homotope à 0 ;

on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\oint_{\gamma} f(z\,,t)\,dz = 0$, c-à-d $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f\left[\gamma(s)\,,t\right]\gamma'(s)\,ds = 0$;

posons $p\;:\;\mathrm{I}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}\;:\;(s\,,t) \mapsto f\left[\gamma(s)\,,t\right]\gamma'(s)$;

on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} p(s\,,t)\,ds = 0\,.$

En appliquant le théorème de Dieudonné à p on trouve

$$0 = \int_{\mathrm{I\!R}} \Big[\int_{\mathrm{I}} p(s,t)\, ds \Big]\, \tilde{\mu}(t) = \int_{\mathrm{I}} \Big[\int_{\mathrm{I\!R}} p(s,t)\, \tilde{\mu}(t) \Big]\, ds = \int_{\mathrm{I}} G\big[\gamma(s)\big]\, \gamma'(s)\, ds$$

$= \oint_{\gamma} G(z)\, dz$; donc G est holomorphe dans U.

2°) Soit $z_\circ \in \mathrm{U}$ et $R > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}}(z_\circ, R) \subset \mathrm{U}$; on pose $\forall t \in \mathrm{I\!R}$ $\Phi(t) = \partial_1 f(z_\circ, t)$;

on a donc $\forall\, t \in \mathrm{I\!R}$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathrm{C}(z_\circ, R)} \frac{f(z,t)}{(z - z_\circ)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f\big(z_\circ + R\, e^{is}, t\big)\, e^{-is}\, ds ;$$

posons $q : [0, 2\pi] \times \mathrm{I\!R} \to \mathbb{C} : (s,t) \mapsto f\big(z_\circ + R\, e^{is}, t\big)\, e^{-is}$; on a $\forall\, t \in \mathrm{I\!R}$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} q(s,t)\, ds .$$

En appliquant le théorème de Dieudonné à q on trouve $\Phi \in \widehat{\mathcal{W}}_B(\mathrm{I\!R})$ et

$$\int_{\mathrm{I\!R}} \Phi(t)\, \tilde{\mu}(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \Big[\int_{\mathrm{I\!R}} q(s,t)\, \tilde{\mu}(t) \Big]\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} G\big(z_\circ + R\, e^{is}\big)\, e^{-is}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathrm{S}(z_\circ, R)} \frac{G(z)}{(z - z_\circ)^2}\, dz = G'(z_\circ) .$$

CHAPITRE XIV

CONVERGENCE FAIBLE ET CONVERGENCE FIDELE

Nous définissons deux types de convergence faible pour les *mesures normées* : la convergence *faible* proprement dite (sur les fonctions bornées *continues*) et la convergence *fidèle* (sur les fonctions bornées *réglées*).

1. Définition : Soient $\tilde{\mu}_n\,,\ \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; $\tilde{\mu}_n$ converge faiblement (resp. fidèlement) vers $\tilde{\mu}$ ssi $\forall\, g \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ $\big[$resp. $\forall\, g \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})\big]$ on a $\boxed{\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)}$.

Notation : $\tilde{\mu}_n \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde{\mu}$ ssi $\tilde{\mu}_n$ converge faiblement vers $\tilde{\mu}$.

$\tilde{\mu}_n \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}$ ssi $\tilde{\mu}_n$ converge fidèlement vers $\tilde{\mu}$.

On a évidemment $\tilde{\mu}_n \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu} \Rightarrow \tilde{\mu}_n \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde{\mu}$.

2.* Théorème : $\forall\, \tilde{\mu}_n\,,\ \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\tilde{\mu}_n \overset{\star}{\to} \tilde{\mu} \Rightarrow \tilde{\mu}_n \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}}$.

3. Théorème : Soient $\tilde{\mu}_n\,,\ \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$, $\tilde{\mu}_n \overset{\mathrm{w}}{\to} \tilde{\mu}$; alors la suite $\|\tilde{\mu}_n\|_\star$ est bornée et on a $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star \le \varliminf_n \|\tilde{\mu}_n\|_\star}$.

Dém : $\mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ étant un espace de Banach, il suffit d'appliquer le théorème de la borne uniforme (“uniform boundedness theorem”).

4. Théorème : Soient $\tilde{\mu}_n\,,\ \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})$; alors $\tilde{\mu}_n \overset{\phi}{\to} \tilde{\mu}$ ssi la suite $\|\tilde{\mu}_n\|_\star$ est bornée et $\forall\, g \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Trivial.

b) $\Leftarrow$: Soit $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde{\mu}_n\|_\star \le M$; soit $g \in \mathcal{R}_B(\mathbb{R})$;

soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$ tel que $\|g - h\| \le \varepsilon/M$;

soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \ge N$ $|\tilde{\mu}_n(h) - \tilde{\mu}(h)| \le \varepsilon$;

on a $\forall\, n \ge N$ $|\tilde{\mu}_n(g) - \tilde{\mu}(g)| \le |\tilde{\mu}_n(g) - \tilde{\mu}_n(h)| + |\tilde{\mu}_n(h) - \tilde{\mu}(h)| + |\tilde{\mu}(h) - \tilde{\mu}(g)|$
$\le \|\tilde{\mu}_n\|_\star \|g - h\| + \varepsilon + \|\tilde{\mu}\|_\star \|h - g\| \le 3\,\varepsilon$.

Le théorème suivant montre que dans des circonstances favorables, mais néanmoins assez générales, la convergence faible équivaut de fait à la convergence fidèle.

5. <u>Théorème</u> : Supposons $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_n \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+ \ \text{ et } \ \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R})^+}$;

alors on a $\boxed{\tilde{\mu}_n \xrightarrow{\text{w}} \tilde{\mu} \ \Leftrightarrow\ \tilde{\mu}_n \xrightarrow{\phi} \tilde{\mu}}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Leftarrow$: Trivial

b) $\Rightarrow$: Soient $\tilde{\mu}_n \in \mathcal{M}^\bullet(\mathbb{R})^+$ et $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^\bullet_D(\mathbb{R})^+$ tels que $\tilde{\mu}_n \xrightarrow{\text{w}} \tilde{\mu}$; il suffit de montrer que $\forall\, g \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R}) \quad \tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$. Soit d'abord $g = 1\!\!1_{[a,b]}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$;
soit $\varepsilon > 0$; comme $\tilde{\mu}$ est diffuse, il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_O(\mathbb{R})$ tels que $0 \le g_1 \le g \le g_2$ et $\tilde{\mu}(g_2 - g_1) \le \varepsilon$; on a donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mu}_n(g_1) \le \tilde{\mu}_n(g) \le \tilde{\mu}_n(g_2)$; on en déduit $\tilde{\mu}(g_1) \le \varliminf_n \tilde{\mu}_n(g) \le \varlimsup_n \tilde{\mu}_n(g) \le \tilde{\mu}(g_2)$; or $\tilde{\mu}(g_2) - \tilde{\mu}(g_1) \le \tilde{\mu}(g_2 - g_1) \le \varepsilon$,
donc $\varlimsup_n \tilde{\mu}_n(g) - \varliminf_n \tilde{\mu}_n(g) \le \varepsilon$; comme ε est arbitraire, $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$.
On en déduit que $\forall\, g \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R}) \quad \tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$. Soit alors $g \in \mathcal{E}_B(\mathbb{R})$;
soit $\varepsilon < 0$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tilde{\mu}(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) \le \varepsilon$; on peut écrire
$\big|\tilde{\mu}_n(g) - \tilde{\mu}(g)\big| = \big|\tilde{\mu}_n(\mathsf{X}_k\, g) + \tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g] - \tilde{\mu}(\mathsf{X}_k\, g) - \tilde{\mu}[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\big|$
$\le \big|\tilde{\mu}_n(\mathsf{X}_k\, g) - \tilde{\mu}(\mathsf{X}_k\, g)\big| + \big|\tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\big| + \big|\tilde{\mu}[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\big|$;
on a d'une part $\big|\tilde{\mu}[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\big| \le \|g\|\, \tilde{\mu}(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) \le \varepsilon\, \|g\|$,
d'autre part $\big|\tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\big| \le \|g\|\, \tilde{\mu}_n(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) = \|g\|\, \big[\tilde{\mu}_n(1\!\!1) - \tilde{\mu}_n(\mathsf{X}_k)\big]$;
or $1\!\!1 \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ et $\mathsf{X}_k \in \mathcal{E}_O(\mathbb{R})$; donc $\varlimsup_n \big|\tilde{\mu}_n[(1\!\!1 - \mathsf{X}_k)\, g]\big| \le \|g\|\, \big[\tilde{\mu}(1\!\!1) - \tilde{\mu}(\mathsf{X}_k)\big]$
$= \|g\|\, \tilde{\mu}(1\!\!1 - \mathsf{X}_k) \le \varepsilon\, \|g\|$; on en déduit $\varlimsup_n \big|\tilde{\mu}_n(g) - \tilde{\mu}(g)\big| \le 2\, \varepsilon\, \|g\|$;
comme ε est arbitraire, $\tilde{\mu}_n(g) \to \tilde{\mu}(g)$.