CHAPITRE X

INDICATEURS ET MODES DE CONVERGENCE DANS $\mathcal{L}^1$

L'*indicateur* lié à la fonction f et l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ correspond à la notion classique de l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels que $f(x) \in \mathrm{I}$. La notation habituelle de cet ensemble, comme de ses analogues, peut d'ailleurs sembler abusive puisqu'on note par exemple $\{f \leq g\}$ l'ensemble $\{x \in [a,b] \,\|\, f(x) \leq g(x)\}$. En revanche ce type de notation convient parfaitement à notre théorie pour laquelle les indicateurs ne sont justement pas des ensembles, mais des *fonctionnelles caractéristiques*.

Les indicateurs permettent de définir quatre nouveaux modes de convergence dans $\mathcal{L}^1$: les convergences *en mesure*, *presque partout*, *plate* et *exacte*. Le complété de $\mathcal{L}^1$ pour chacun de ces modes de convergence est néanmoins identique : c'est l'espace de *toutes les fonctionnelles*, sommables ou non.

§ 1. Indicateurs de $\mathcal{L}^1$

1.1. Définition : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on définit les éléments de $\mathcal{K}$ suivants :

$$\boxed{\{\tilde f > 0\} = \mathrm{S}(\tilde f^+)} \qquad \{\tilde f \leq 0\} = 1 - \{\tilde f > 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f^+)$$

$$\{\tilde f < 0\} = \{-\tilde f > 0\} = \mathrm{S}(\tilde f^-) \qquad \{\tilde f \geq 0\} = 1 - \{\tilde f < 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f^-)$$

$$\boxed{\{\tilde f \neq 0\} = \mathrm{S}(\tilde f)} \qquad \{\tilde f = 0\} = 1 - \{\tilde f \neq 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f).$$

1.2. Définition : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on définit les éléments de $\mathcal{K}$ suivants :

$$\{\tilde f > \tilde g\} = \{\tilde g < \tilde f\} = \{\tilde f - \tilde g > 0\} = \mathrm{S}\left[(\tilde f - \tilde g)^+\right]$$

$$\{\tilde f \geq \tilde g\} = 1 - \{\tilde g > \tilde f\} = 1 - \mathrm{S}\left[(\tilde g - \tilde f)^+\right]$$

$$\{\tilde f \neq \tilde g\} = \{\tilde f - \tilde g \neq 0\} = \mathrm{S}(\tilde f - \tilde g)$$

$$\{\tilde f = \tilde g\} = \{\tilde f - \tilde g = 0\} = 1 - \mathrm{S}(\tilde f - \tilde g).$$

1.3. Définition : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on définit les éléments de $\mathcal{K}$ suivants :

$$\{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde g\}\,\{\tilde g > \tilde h\}$$

$$\{\tilde f \geq \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f \geq \tilde g\}\,\{\tilde g > \tilde h\}$$

$$\{\tilde f > \tilde g \geq \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde g\}\,\{\tilde g \geq \tilde h\}$$

$$\{\tilde f \geq \tilde g \geq \tilde h\} = \{\tilde f \geq \tilde g\}\,\{\tilde g \geq \tilde h\}$$

$$\text{Les applications}\quad \begin{cases} \mathcal{L}^1 \to \mathcal{K} \ : \ \tilde f \mapsto \{\tilde f > 0\} & \ldots \text{etc} \ldots \\ (\mathcal{L}^1)^2 \to \mathcal{K} \ : \ (\tilde f, \tilde g) \mapsto \{\tilde f > \tilde g\} & \ldots \text{etc} \ldots \\ (\mathcal{L}^1)^3 \to \mathcal{K} \ : \ (\tilde f, \tilde g, \tilde h) \mapsto \{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} & \ldots \text{etc} \ldots \end{cases}$$

sont les $\boxed{\text{indicateurs}}$ de $\mathcal{L}^1$.

1.4. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{array}{l} \{\tilde f > 0\}\{\tilde g > 0\} \le \{\tilde f + \tilde g > 0\} \le \{\tilde f > 0\} \vee \{\tilde g > 0\} \\ \{\tilde f \ge 0\}\{\tilde g \ge 0\} \le \{\tilde f + \tilde g \ge 0\} \le \{\tilde f \ge 0\} \vee \{\tilde g \ge 0\} \end{array}}$$

Dém : $\{\tilde f > 0\}\{\tilde g > 0\} = \mathrm{S}(\tilde f^+)\,\mathrm{S}(\tilde g^+) = \mathrm{S}(\tilde f^+ \wedge \tilde g^+) = \mathrm{S}\big[(\tilde f \wedge \tilde g)^+\big] \le \mathrm{S}\big[(\tilde f + \tilde g)^+\big]$
$= \{\tilde f + \tilde g > 0\} = \mathrm{S}\big[(\tilde f + \tilde g)^+\big] \le \mathrm{S}\big(\tilde f^+ + \tilde g^+\big) = \mathrm{S}(\tilde f^+) \vee \mathrm{S}(\tilde g^+) = \{\tilde f > 0\} \vee \{\tilde g > 0\}$.

1.5. Corollaire : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on a $\{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} \le \{\tilde f > \tilde h\}$

et $\{\tilde f \ge \tilde g \ge \tilde h\} \le \{\tilde f \ge \tilde h\}$.

Dém : $\{\tilde f > \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde g\}\{\tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f - \tilde g > 0\}\{\tilde g - \tilde h > 0\}$

$\le \{\tilde f - \tilde g + \tilde g - \tilde h > 0\} = \{\tilde f > \tilde h\}$.

1.6. Lemme : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\big(\tilde h - \tilde f \vee \tilde g\big)^+ = (\tilde h - \tilde f)^+ \wedge (\tilde h - \tilde g)^+ \qquad \big(\tilde f \vee \tilde g - \tilde h\big)^+ = (\tilde f - \tilde h)^+ \wedge (\tilde g - \tilde h)^+.$$

$$\big(\tilde h - \tilde f \wedge \tilde g\big)^+ = (\tilde h - \tilde f)^+ \vee (\tilde h - \tilde g)^+ \qquad \big(\tilde f \wedge \tilde g - \tilde h\big)^+ = (\tilde f - \tilde h)^+ \vee (\tilde g - \tilde h)^+.$$

Dém : Vrai dans $\mathcal{E}$, donc vrai dans $\mathcal{L}^1$ par continuité.

1.7. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g, \tilde h \in \mathcal{L}^1$ on a

$$\boxed{\begin{array}{ll} \{\tilde f \vee \tilde g < \tilde h\} = \{\tilde f < \tilde h\}\{\tilde g < \tilde h\} & \{\tilde f \vee \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde h\} \vee \{\tilde g > \tilde h\} \\ \{\tilde f \wedge \tilde g < \tilde h\} = \{\tilde f < \tilde h\} \vee \{\tilde g < \tilde h\} & \{\tilde f \wedge \tilde g > \tilde h\} = \{\tilde f > \tilde h\}\{\tilde g > \tilde h\} \end{array}}$$

Dém : $\{\tilde f \vee \tilde g < \tilde h\} = \mathrm{S}\big[(\tilde h - \tilde f \vee \tilde g)^+\big] = \mathrm{S}\big[(\tilde h - \tilde f)^+\big] \wedge \mathrm{S}\big[(\tilde h - \tilde g)^+\big]$

$= \mathrm{S}\big[(\tilde h - \tilde f)^+\big]\,\mathrm{S}\big[(\tilde h - \tilde g)^+\big] = \{\tilde f < \tilde h\}\{\tilde g < \tilde h\}$.

1.8. Corollaire : $\forall \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a $\quad \{|\tilde f| < \tilde g\} = \{\tilde f < \tilde g\}\{-\tilde f < \tilde g\} = \{-\tilde g < \tilde f < \tilde g\}$

et $\quad \{|\tilde f| > \tilde g\} = \{\tilde f > \tilde g\} \vee \{-\tilde f > \tilde g\}$.

Dém : $\{|\tilde f| < \tilde g\} = \{(\tilde f) \vee (\tilde f^-) < \tilde g\} = \{\tilde f < g\}\{-\tilde f < g\}$.

1.9. Corollaire : $\forall \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a
$$\boxed{\begin{array}{l} \{\tilde f > \tilde g\} = \{\tilde f \vee \tilde g \neq \tilde g\} = \{\tilde f \wedge \tilde g \neq \tilde f\} \\ \{\tilde f \geq \tilde g\} = \{\tilde f \vee \tilde g = \tilde f\} = \{\tilde f \wedge \tilde g = \tilde g\} \end{array}}$$

Dém :

1) $\{\tilde f \vee \tilde g \neq \tilde g\} = \{\tilde f \vee \tilde g > \tilde g\} = \{\tilde f > \tilde g\} \vee \{\tilde g > \tilde g\} = \{\tilde f > \tilde g\}$.

2) $\{\tilde f \geq \tilde g\} = 1 - \{\tilde f < \tilde g\} = 1 - \{\tilde f \vee \tilde g \neq \tilde f\} = \{\tilde f \vee \tilde g = \tilde f\}$.

1.10. Théorème : $\forall \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a
$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde f\,\{\tilde f = \tilde g\} = \tilde g\,\{\tilde f = \tilde g\} \\ \tilde f\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \leq \tilde g\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \end{array}}$$

Dém :

1) $(\tilde f - \tilde g)\{\tilde f = \tilde g\} = (\tilde f - \tilde g)\left[1 - \mathrm{S}(\tilde f - \tilde g)\right] = \tilde f - \tilde g - (\tilde f - \tilde g) = 0$.

2) $(\tilde f - \tilde g)\{\tilde f \leq \tilde g\} = (\tilde f - \tilde g)\Big[1 - \mathrm{S}\left[(\tilde f - \tilde g)^+\right]\Big] = \tilde f - \tilde g - (\tilde f - \tilde g)^+ = -(\tilde f - \tilde g)^- \leq 0$.

1.11. Théorème : $\forall \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a
$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde f\,\{\tilde f \leq \tilde g\} = (\tilde f \wedge \tilde g)\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \\ \tilde g\,\{\tilde f \leq \tilde g\} = (\tilde f \vee \tilde g)\,\{\tilde f \leq \tilde g\} \end{array}}$$

Dém :

1) $\tilde f\,\{\tilde f \leq \tilde g\} = \tilde f\,\{\tilde f \wedge \tilde g = \tilde f\} = (\tilde f \wedge \tilde g)\{\tilde f \wedge \tilde g = \tilde f\} = (\tilde f \wedge \tilde g)\{\tilde f \leq \tilde g\}$.

2) Idem.

1.12. Théorème :

$\forall \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\{\tilde f \tilde g > 0\} = \{\tilde f > 0\}\{\tilde g > 0\} \vee \{\tilde f < 0\}\{\tilde g < 0\}}$.

Dém : $\tilde f \tilde g = (\tilde f^+ - \tilde f^-)(\tilde g^+ - \tilde g^-) = \tilde f^+ \tilde g^+ + \tilde f^- \tilde g^- - \left(\tilde f^+ \tilde g^- + \tilde f^- \tilde g^+\right)$;

or $\left(\tilde f^+ \tilde g^+ + \tilde f^- \tilde g^-\right) \wedge \left(\tilde f^+ \tilde g^- + \tilde f^- \tilde g^+\right) = 0$, donc $\left(\tilde f \tilde g\right)^+ = \tilde f^+ \tilde g^+ + \tilde f^- \tilde g^-$;

on a donc $\{\tilde f \tilde g > 0\} = \mathrm{S}\left[(\tilde f \tilde g)^+\right] = \mathrm{S}\left(\tilde f^+ \tilde g^+ + \tilde f^- \tilde g^-\right) = \mathrm{S}\left(\tilde f^+ \tilde g^+\right) \vee \mathrm{S}\left(\tilde f^- \tilde g^-\right)$

$= \mathrm{S}(\tilde f^+)\,\mathrm{S}(\tilde g^+) \vee \mathrm{S}(\tilde f^-)\,\mathrm{S}(\tilde g^-) = \{\tilde f > 0\}\{\tilde g > 0\} \vee \{\tilde f < 0\}\{\tilde g < 0\}$.

1.13. Corollaire : $\forall\, \tilde f \in (\mathcal{L}^2)^+ \quad \forall\, \alpha > 0$ on a $\boxed{\{\tilde f^{\,2} > \alpha^2\} = \{\tilde f > \alpha\}}$.

Dém : $\{\tilde f^{\,2} > \alpha^2\} = \{\tilde f^{\,2} - \alpha^2 > 0\} = \{(\tilde f - \alpha)\,(\tilde f + \alpha) > 0\}$

$= \{\tilde f - \alpha > 0\}\,\{\tilde f + \alpha > 0\} \vee \{\tilde f - \alpha < 0\}\,\{\tilde f + \alpha < 0\} = \{\tilde f - \alpha > 0\} \vee 0 = \{\tilde f > \alpha\}$.

1.14. Théorème :

$\forall\, \tilde f\,,\, \tilde g \in (\mathcal{L}^2)^+ \quad \forall\, \alpha\,,\, \beta > 0$ on a $\boxed{\{\tilde f\,\tilde g > \alpha\,\beta\} \le \{\tilde f > \alpha\} \vee \{\tilde g > \beta\}}$.

Dém : $\{\tilde f\,\tilde g > \alpha\,\beta\} = \{\tilde f\,\tilde g - \alpha\,\beta > 0\} = \{(\tilde f - \alpha)\,\tilde g + \alpha\,(\tilde g - \beta) > 0\}$

$\le \{(\tilde f - \alpha)\,\tilde g > 0\} \vee \{\alpha\,(\tilde g - \beta) > 0\} = \{\tilde f - \alpha > 0\}\,\{\tilde f > 0\} \vee \{\tilde g - \beta > 0\}\,\{\tilde g > 0\}$

$\le \{\tilde f > \alpha\} \vee \{\tilde g > \beta\}$.

1.15. Inégalité de Markov : $\forall\, \tilde f \in (\mathcal{L}^1)^+$ on a $\boxed{\{\tilde f \ge 1\} \le \tilde f}$.

Dém : On a $\tilde f = \tilde f - 1 + 1 = (\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^- + 1$;

on peut donc écrire $\tilde f \ge \tilde f\, \{\tilde f \ge 1\} = \left[(\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^- + 1\right] \{\tilde f \ge 1\}$

$= \left[(\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^-\right] \Big(1 - \mathrm{S}\left[(\tilde f - 1)^-\right]\Big) + \{\tilde f \ge 1\}$

$= (\tilde f - 1)^+ - (\tilde f - 1)^- + (\tilde f - 1)^- + \{\tilde f \ge 1\} = \{\tilde f \ge 1\}$.

1.16.* Corollaire : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{{}^1\!\lim_{\alpha \to +\infty} \{|\tilde f| \ge \alpha\} = 0}$.

1.17. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{{}^1\!\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\tilde f \ge \varepsilon\} = {}^1\!\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\tilde f > \varepsilon\} = \{\tilde f > 0\}}$.

Dém : On pose $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \tilde g_\varepsilon = (\tilde f - \varepsilon)^+$; la "suite" $\tilde g_\varepsilon$ est croissante et on a $\tilde g_\varepsilon \xrightarrow{1} \tilde g^+$ quand $\varepsilon \to 0^+$; donc $\mathrm{S}\,(\tilde g_\varepsilon) \xrightarrow{1} \mathrm{S}\,(\tilde g^+)$, c-à-d $\{\tilde f > \varepsilon\} \xrightarrow{1} \{\tilde f > 0\}$ quand $\varepsilon \to 0^+$. Par aileurs $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \{\tilde f > 2\,\varepsilon\} \le \{\tilde f \ge \varepsilon\} \le \{\tilde f > 0\}$; donc $\{\tilde f \ge \varepsilon\} \xrightarrow{1} \{\tilde f > 0\}$ quand $\varepsilon \to 0^+$.

1.18. Théorème : Soient $\tilde f_n\,,\, \tilde f,\ \tilde g \in \mathcal{L}^1$, $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f$, $\tilde f_n$ suite $\boxed{\text{croissante}}$;

alors on a $\boxed{\{\tilde f_n > \tilde g\} \xrightarrow{1} \{\tilde f > \tilde g\}}$ et $\boxed{\{\tilde f_n \le \tilde g\} \xrightarrow{1} \{\tilde f \le \tilde g\}}$.

Dém : La suite $(\tilde f_n - \tilde g)^+ \in (\mathcal{L}^1)^+$ est croissante et $(\tilde f_n - \tilde g)^+ \xrightarrow{1} (\tilde f - \tilde g)^+$;

donc $\{\tilde f_n \le \tilde g\} = \mathrm{S}\left[(\tilde f_n - \tilde g)^+\right] \xrightarrow{1} \mathrm{S}\left[(\tilde f - \tilde g)^+\right] = \{\tilde f \le \tilde g\}$.

De plus $\{\tilde f_n \le \tilde g\} = 1 - \{\tilde f_n > \tilde g\} \xrightarrow{1} 1 - \{\tilde f > \tilde g\} = \{\tilde f \le \tilde g\}$.

1.19. Corollaire : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite dominée et soit $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$; alors on a

$$\boxed{\big\{ \big(\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n\big) > \tilde{g} \big\} = \operatorname*{Sup}_n \big\{ \tilde{f}_n > \tilde{g} \big\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\big\{ \big(\operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n\big) \leq \tilde{g} \big\} = \operatorname*{Inf}_n \big\{ \tilde{f}_n \leq \tilde{g} \big\}}.$$

Dém :

Posons $\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\tilde{h}_p = \operatorname*{Sup}_{1 \leq n \leq p} \tilde{f}_n$; la suite $\tilde{h}_p$ est croissante et $\tilde{h}_p \xrightarrow{1} \tilde{h} = \operatorname*{Sup}_n \tilde{f}_n$;
on a donc $\big\{ \tilde{h} > \tilde{g} \big\} = \operatorname*{Sup}_p \big\{ \tilde{h}_p > \tilde{g} \big\} = \operatorname*{Sup}_p \operatorname*{Sup}_{1 \leq n \leq p} \big\{ \tilde{f}_n > \tilde{g} \big\} = \operatorname*{Sup}_n \big\{ \tilde{f}_n > \tilde{g} \big\}$.

1.20. Exercice

Soient $\tilde{f} \in (\mathcal{L}^1)^+$ et $c > 0$ tels que $\big|\tilde{f}\big| \geq c$; démontrer $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \big\{ \tilde{f} \leq n \big\} \leq \frac{2}{\tilde{f}}}$.

Solution

Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1 : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{p - \frac{1}{2}}}$.

Dém : $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\,(n+\frac{1}{2})} \leq \sum_{n=p}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \Big) = \frac{1}{p-\frac{1}{2}}$.

Lemme 2 : $\forall\, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\boxed{\big\{ \tilde{f} \leq \alpha \big\} \leq \big\{ \tilde{g} \leq \alpha + \varepsilon \big\} + \frac{1}{\varepsilon} \big| \tilde{f} - \tilde{g} \big|}$.

Dém : $\big\{ \tilde{f} \leq \alpha \big\} = \big\{ \tilde{g} + \tilde{f} - \tilde{g} \leq \alpha + \varepsilon - \varepsilon \big\} \leq \big\{ \tilde{g} \leq \alpha + \varepsilon \big\} + \big\{ \tilde{f} - \tilde{g} \leq -\varepsilon \big\}$
$= \big\{ \tilde{g} \leq \alpha + \varepsilon \big\} + \big\{ \tilde{g} - \tilde{f} \geq \varepsilon \big\} \leq \big\{ \tilde{g} \leq \alpha + \varepsilon \big\} + \big\{ |\tilde{g} - \tilde{f}| \geq \varepsilon \big\} \leq \big\{ \tilde{g} \leq \alpha + \varepsilon \big\} + \frac{1}{\varepsilon} \big| \tilde{f} - \tilde{g} \big|$.

Démonstration de l'exercice

Supposons d'abord $\tilde{f} = f \in \mathcal{E}^+$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on peut identifier $\big\{ f \leq n \big\}$ à la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathrm{E}_n = \big\{ x \in [a\,,b] \,\big\|\, f(x) \leq n \big\}$; on pose $\forall\, x \in [a\,,b]$
$F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}(x) = \sum_{n \geq f(x)} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=[f(x)]}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{[f(x)] - \frac{1}{2}}$ où $[f(x)]$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $f(x)$; on remarquera au passage que $F \in \mathcal{E}^+$.
Si $f(x) \leq 1$ on en déduit $F(x) \leq \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \leq \dfrac{2}{f(x)}$; si $f(x) \geq 1$ on en déduit
$F(x) \leq \dfrac{1}{f(x) - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{2\, f(x) - 1} = \dfrac{2}{f(x) + f(x) - 1} \leq \dfrac{2}{f(x)}$.

La proposition est donc démontrée $\forall\, f \in \mathcal{E}^+$.

Supposons maintenant $\tilde{f} \in (\mathcal{L}^1)^+$ et soit une suite $f_k \in \mathcal{E}^+$ telle que $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$f_k \geq c$ et telle que $f_k \xrightarrow{1} \tilde{f}$; soit $0 < \varepsilon < c$; on peut écrire $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \{\tilde{f} \leq n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Big[\{f_k \leq n + \varepsilon\} + \frac{1}{\varepsilon} \,|\, \tilde{f} - f_k \,| \Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \{f_k - \varepsilon \leq n\} + \frac{\pi^2}{6\,\varepsilon} \,|\, \tilde{f} - f_k \,| \leq \frac{2}{f_k - \varepsilon} + \frac{\pi^2}{6\,\varepsilon} \,|\, \tilde{f} - f_k \,| \;;$$

en faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \{\tilde{f} \leq n\} \leq \frac{2}{\tilde{f} - \varepsilon}$,

et en faisant tendre ε vers 0 on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \{\tilde{f} \leq n\} \leq \frac{2}{\tilde{f}}$.

§ 2. Convergence en mesure

2.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge en mesure vers $\tilde{f}$ ssi

$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$.

2.2. Théorème : $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0 \ \Big[\{\tilde{f}_n > \tilde{f} + \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0 \quad \text{et} \quad \{\tilde{f} > \tilde{f}_n + \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0 \Big]$.

2.3. Théorème : $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \, \big\| \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \varepsilon\} \big\|_1 = 0}$.

2.4. Critère pratique : $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \, \big\| \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \varepsilon\} \big\|_1 \leq \varepsilon}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: On a $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \, \big\| \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \varepsilon\} \big\|_1 = 0 \leq \varepsilon$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\varepsilon > 0$; $\forall\, \eta > 0$ tel que $\eta \leq \varepsilon$ on a

$\overline{\lim_n} \, \big\| \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \varepsilon\} \big\|_1 \leq \overline{\lim_n} \, \big\| \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \eta\} \big\|_1 \leq \eta$;

donc $\lim_n \, \big\| \{\,|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,| > \varepsilon\} \big\|_1 = 0$.

2.5. Théorème : $\forall\, \tilde{f}_n\,,\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$.

Dém : Posons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \tilde{g}_n = \big|\, \tilde{f}_n - \tilde{f} \,\big| \in \mathcal{L}^1_+$; alors $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ on a

$\{\tilde{g}_n > \varepsilon\} \leq \{\tilde{g}_n \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\, \tilde{g}_n$; donc $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \{\tilde{g}_n > \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0$, c-à-d $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$.

2.6. Théorème : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite **dominée** et soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; alors on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$.

Dém : Il suffit de démontrer $\Leftarrow$: Soit $F \in (\mathcal{L}^1)^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |\tilde{f}_n| \leq F$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \tilde{g}_n = |\tilde{f}_n - \tilde{f}\,| \leq 2F$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi \in \mathcal{E}$ tel que $\|F - \varphi\|_1 < \varepsilon$; on a $\{\tilde{g}_n > \varepsilon\} \xrightarrow{1} 0$; de plus $\tilde{g}_n = \{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\,\tilde{g}_n + \{\tilde{g}_n \leq \varepsilon\}\,\tilde{g}_n \leq 2\{\tilde{g}_n > \varepsilon\}F + \varepsilon$;
$= 2\{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\varphi + 2\{\tilde{g}_n > \varepsilon\}(F - \varphi) + \varepsilon \leq 2\{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\varphi + 2|F - \varphi| + \varepsilon$;
on en déduit $\|\tilde{g}_n\|_1 \leq 2\,\|\varphi\|\,\big\|\{\tilde{g}_n > \varepsilon\}\big\|_1 + 2\,\|F - \varphi\|_1 + \varepsilon\,(b - a)$, et donc $\overline{\lim_n}\ \|\tilde{g}_n\|_1 \leq 2\,\varepsilon + \varepsilon\,(b - a)$; donc $\overline{\lim_n}\ \|\tilde{g}_n\|_1 = 0$, c-à-d $\tilde{g}_n \xrightarrow{1} 0$, c-à-d $\tilde{f}_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$.

2.7. Lemme : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ tel que $\forall \varepsilon > 0\ \ \{|\tilde{f}\,| > \varepsilon\} = 0$; alors $\tilde{f} = 0$.

Dém : $\forall \varepsilon > 0$ on a $\tilde{f} = \tilde{f}\,\{\tilde{f} \leq \varepsilon\} + \tilde{f}\,\{\tilde{f} > \varepsilon\} \leq \varepsilon\,\{\tilde{f} \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon$; donc $\forall \varepsilon > 0\ \ \|\tilde{f}\,\|_1 \leq \varepsilon\,(b - a)$; donc $\tilde{f} = 0$.

2.8. Théorème :

Soient $\tilde{f}_n, \tilde{g}, \tilde{h} \in \mathcal{L}^1$ et supposons que $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{g}$ et $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{h}$; alors $\tilde{g} = \tilde{h}$.

Dém : On a $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \{|\tilde{g} - \tilde{h}| > \varepsilon\} \leq \{|\tilde{f}_n - \tilde{g}| + |\tilde{f}_n - \tilde{h}| > \varepsilon\}$
$\leq \{|\tilde{f}_n - \tilde{g}| > \varepsilon/2\} \vee \{|\tilde{f}_n - \tilde{h}| > \varepsilon/2\} \xrightarrow{1} 0$; donc $\forall \varepsilon > 0\ \ \{|\tilde{g} - \tilde{h}| > \varepsilon\} = 0$; donc $\tilde{g} = \tilde{h}$.

2.9.* Théorème : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{g}_n, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$, $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$, $\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{g}$; alors $\tilde{f}_n + \tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f} + \tilde{g}$, $\quad \tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f} \vee \tilde{g}$, $\quad \tilde{f}_n \wedge \tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f} \wedge \tilde{g}$.

2.10. Lemme : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^2$ telle que $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} 0$; alors $\forall \tilde{g} \in \mathcal{L}^2\ \ \tilde{f}_n\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; soit $\alpha > 0$ tel que $\big\|\{|\tilde{g}| > \alpha\}\big\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{|\tilde{f}_n\,\tilde{g}| > \varepsilon\} = \{|\tilde{f}_n|\,|\tilde{g}| > \varepsilon\} \leq \{|\tilde{f}_n| > \varepsilon/\alpha\} \vee \{|\tilde{g}| > \alpha\}$; donc $\forall n \in \mathbb{N}$
$\big\|\{|\tilde{f}_n\,\tilde{g}| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \big\|\{|\tilde{f}_n| > \varepsilon/\alpha\}\big\|_1 + \big\|\{|\tilde{g}| > \alpha\}\big\|_1 \leq \big\|\{|\tilde{f}_n| > \varepsilon/\alpha\}\big\|_1 + \varepsilon$;
donc $\overline{\lim_n}\ \big\|\{|\tilde{f}_n\,\tilde{g}| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \varepsilon$; donc $\tilde{f}_n\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$.

2.11. Théorème : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{g}_n, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2$, $\tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$, $\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{g}$; alors $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}\,\tilde{g}$.

Dém : $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n - \tilde{f}\,\tilde{g} = (\tilde{f}_n - \tilde{f})\,\tilde{g} + \tilde{f}\,(\tilde{g}_n - \tilde{g}) + (\tilde{f}_n - \tilde{f})\,(\tilde{g}_n - \tilde{g})$;
on a déjà $(\tilde{f}_n - \tilde{f})\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$ et $\tilde{f}\,(\tilde{g}_n - \tilde{g}) \overset{\text{ms}}{\to} 0$; par ailleurs on a $\forall \varepsilon > 0$
$\Big\{|(\tilde{f}_n - \tilde{f})\,(\tilde{g}_n - \tilde{g})| > \varepsilon\Big\} \leq \{|\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \sqrt{\varepsilon}\} \vee \{|\tilde{g}_n - \tilde{g}| > \sqrt{\varepsilon}\} \xrightarrow{1} 0$; donc $(\tilde{f}_n - \tilde{f})\,(\tilde{g}_n - \tilde{g}) \overset{\text{ms}}{\to} 0$; finalement $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n - \tilde{f}\,\tilde{g} \overset{\text{ms}}{\to} 0$, c-à-d $\tilde{f}_n\,\tilde{g}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}\,\tilde{g}$.

2.12. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde f_n\,,\,\tilde f\in\mathcal{L}^1$; alors $\tilde f_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde f$ ssi $\boxed{1\!\!1\wedge\big|\tilde f_n-\tilde f\big|\xrightarrow{1}0}$.

<u>Dém</u> : Posons $\forall\,n\in\mathbb{N}\quad \tilde g_n=\big|\tilde f_n-\tilde f\big|$ et $\tilde h_n=1\!\!1\wedge\tilde g_n$;

a) $\Rightarrow$: On a $\tilde h_n=1\!\!1\wedge\tilde g_n \overset{\text{ms}}{\to} 1\!\!1\wedge 0=0$; or $\forall\,n\in\mathbb{N}\quad 0\le\tilde h_n\le 1\!\!1$; la suite $\tilde h_n$ est donc dominée ; on en déduit $\tilde h_n\xrightarrow{1}0$.

b) $\Leftarrow$: Soit $0<\varepsilon<1$; on a $\{\tilde h_n>\varepsilon\}=\{1\!\!1>\varepsilon\}\{\tilde g_n>\varepsilon\}=\{\tilde g_n>\varepsilon\}$;
or $\tilde h_n\xrightarrow{1}0$, donc $\tilde h_n\overset{\text{ms}}{\to}0$, on en déduit $\{\tilde h_n>\varepsilon\}\xrightarrow{1}0$, c-à-d $\{\tilde g_n>\varepsilon\}\xrightarrow{1}0$;
donc $\tilde g_n\overset{\text{ms}}{\to}0$.

2.13. <u>Définition</u> : Une <u>pseudo-norme</u> sur un espace vectoriel réel V est une application $\|\ \|_\S\ :\ \mathrm{V}\to\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes

1) $\forall\,u\in\mathrm{V}\quad\big[\,\|u\|_\S=0\ \Rightarrow\ u=0\,\big]$

2) $\forall\,u\,,\,v\in\mathrm{V}\quad\|u+v\|_\S\le\|u\|_\S+\|v\|_\S$

3) $\forall\,u\in\mathrm{V}\quad\|-u\|_\S=\|u\|_\S$

4) $\forall\,u\in\mathrm{V}\quad\forall\,\lambda\ge1\quad\|u\|_\S\le\|\lambda\,u\|_\S\le\lambda\,\|u\|_\S$.

2.14.* <u>Théorème</u> : La topologie de la convergence en mesure dans $\mathcal{L}^1$ est définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\tilde f\|_{\text{ms}}=\big\|1\wedge|\tilde f|\big\|_1}\le\|\tilde f\|_1$.

2.15. <u>Théorème</u> :

Soient $\tilde f_n\,,\,\tilde f\in\big(\mathcal{L}^1\big)^+$; alors $\tilde f_n\overset{\text{ms}}{\to}\tilde f$ ssi $\forall\,\alpha>0\quad\alpha\wedge\tilde f_n\xrightarrow{1}\alpha\wedge\tilde f$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: $\forall\,\alpha>0$ on a $\alpha\wedge\tilde f_n\overset{\text{ms}}{\to}\alpha\wedge\tilde f$, donc $\alpha\wedge\tilde f_n\xrightarrow{1}\alpha\wedge\tilde f$.

b) $\Leftarrow$: Soient $\varepsilon>0$ et $\alpha\ge\varepsilon$; on a

$$\big\{|\tilde f_n-\tilde f|>\varepsilon\big\}\le\big\{|\tilde f_n-\tilde f_n\wedge\alpha|>\varepsilon\big\}+\big\{|\tilde f_n\wedge\alpha-\tilde f\wedge\alpha|>\varepsilon\big\}+\big\{|\tilde f-\tilde f\wedge\alpha|>\varepsilon\big\}$$

$$=\big\{\tilde f_n-\tilde f_n\wedge\alpha>\varepsilon\big\}+\big\{|\tilde f_n\wedge\alpha-\tilde f\wedge\alpha|>\varepsilon\big\}+\big\{\tilde f-\tilde f\wedge\alpha>\varepsilon\big\}\ ;$$

On a d'ailleurs

$$\big\{\tilde f-\tilde f\wedge\alpha>\varepsilon\big\}=\big\{\tilde f-\varepsilon>\tilde f\wedge\alpha\big\}=\big\{\tilde f-\varepsilon>\tilde f\big\}\vee\big\{\tilde f-\varepsilon>\alpha\big\}=\big\{\tilde f>\alpha+\varepsilon\big\}.$$

De même $\big\{\tilde f_n-\tilde f_n\wedge\alpha>\varepsilon\big\}=\big\{\tilde f_n>\alpha+\varepsilon\big\}\le\big\{\tilde f_n>\alpha\big\}=\big\{\tilde f_n\wedge\alpha>\alpha\big\}$

$$=\big\{\tilde f_n\wedge\alpha-\tilde f\wedge\alpha+\tilde f\wedge\alpha>\alpha\big\}\le\big\{\tilde f_n\wedge\alpha-\tilde f\wedge\alpha>\varepsilon\big\}+\big\{\tilde f\wedge\alpha>\alpha-\varepsilon\big\}$$

$$\le\big\{|\tilde f_n\wedge\alpha-\tilde f\wedge\alpha|>\varepsilon\big\}+\big\{\tilde f>\alpha-\varepsilon\big\}.$$

On en déduit $\{|\tilde f_n - \tilde f| > \varepsilon\} \leq 2\,\{\tilde f > \alpha - \varepsilon\} + 2\,\{|\tilde f_n \wedge \alpha - \tilde f \wedge \alpha| > \varepsilon\}$;

on peut donc écrire $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \alpha \geq \varepsilon \quad \overline{\lim_n} \;\big\|\{|\tilde f_n - \tilde f| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq 2\,\big\|\{\tilde f > \alpha - \varepsilon\}\big\|_1$;

en faisant tendre α vers $+\infty$ on trouve bien $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \;\big\|\{|\tilde f_n - \tilde f| > \varepsilon\}\big\|_1 = 0$.

2.16. <u>Définition</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est <u>de Cauchy en mesure</u> (C ms) ssi

$$\boxed{\forall\, \delta, \varepsilon > 0 \ \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \forall\, p > n \quad \big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \delta}\,.$$

2.17. <u>Critère pratique</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est C ms ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \forall\, p > n \quad \big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \varepsilon}\,.$$

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: Trivial.

b) $\Leftarrow$: Soient $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$; supposons $\varepsilon \leq \delta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p > n \quad \big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \varepsilon$; alors on a aussi $\big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \delta$; supposons $\delta \leq \varepsilon$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p > n \quad \big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \delta\}\big\|_1 \leq \delta$; alors on a aussi $\big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \varepsilon\}\big\|_1 \leq \big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \delta\}\big\|_1 \leq \delta$.

2.18. <u>Théorème</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est de Cauchy en mesure ssi l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite $\alpha_n = \sup\limits_{p > n} \big\|\{|\tilde f_p - \tilde f_n| > \varepsilon\}\big\|_1 \to 0$.

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite $\beta_n = \sup\limits_{p > n} \big\|\{\tilde f_p - \tilde f_n > \varepsilon\}\big\|_1 \to 0$

et la suite $\gamma_n = \sup\limits_{p > n} \big\|\{\tilde f_n - \tilde f_p > \varepsilon\}\big\|_1 \to 0$.

3) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite $\delta_n = \sup\limits_{p > n} \big\|\mathbb{1} \wedge |\tilde f_p - \tilde f_n|\big\|_1 \to 0$.

<u>Dém</u> : Analogue aux démonstrations précédentes.

2.19. <u>Définition</u> : Une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^1$ est <u>dominée en mesure</u> (D ms) ssi

$$\boxed{\sup_n \big\|\{|\tilde f_n| \geq \alpha\}\big\|_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty}\,.$$

2.20. Théorème : $\boxed{\mathrm{C\,ms} \Rightarrow \mathrm{D\,ms}}$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > n \quad \left\| \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| > \varepsilon \} \right\|_1 \leq \varepsilon$;
choisissons $\beta > 0$ tel que $\left\| \{ |\tilde{f}_n| > \beta \} \right\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\underline{\underline{\forall p > n}}$

$\{ |\tilde{f}_p| > \beta + \varepsilon \} \leq \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| + |\tilde{f}_n| > \beta + \varepsilon \} \leq \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| > \varepsilon \} + \{ |\tilde{f}_n| > \beta \} \leq 2\,\varepsilon$.

Par ailleurs choisissons $\alpha \geq \beta + \varepsilon$ tel que $\underline{\underline{\forall p \leq n}} \quad \left\| \{ |\tilde{f}_p| > \alpha \} \right\|_1 \leq 2\,\varepsilon$;
alors on a $\forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \{ |\tilde{f}_p| > \alpha \} \right\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.

§ 3. Convergence presque partout

(Démonstrations analogues à celles du paragraphe précédent).

3.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge presque partout vers $\tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \{ |\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon \} \overset{\times}{\to} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ et on note $\boxed{\tilde{f} = \operatorname*{Lim}_n \tilde{f}_n}$.

3.2. Théorème : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \quad \left[\{ \tilde{f}_n > \tilde{f} + \varepsilon \} \overset{\times}{\to} 0 \text{ et } \{ \tilde{f} > \tilde{f}_n + \varepsilon \} \overset{\times}{\to} 0 \right]$.

3.3. Théorème : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\operatorname*{Lim}_n} \{ |\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon \} = 0}$.

3.4. Critère pratique 1 : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \left\| \overline{\operatorname*{Lim}_n} \{ |\tilde{f}_n - \tilde{f}| > \varepsilon \} \right\|_1 \leq \varepsilon}$.

3.5. Critère pratique 2 : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\| \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}| > \varepsilon \} \right\|_1 \leq \varepsilon}.$$

3.6. Critère pratique 3 : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall q \geq p \quad \left\| \operatorname*{Sup}_{p \leq r \leq q} \{ |\tilde{f}_r - \tilde{f}| > \varepsilon \} \right\|_1 \leq \varepsilon}.$$

3.7. Théorème : $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \tilde{f}$ ssi $\boxed{\mathbb{1} \wedge |\tilde{f}_n - \tilde{f}| \overset{\times}{\to} 0}$.

3.8. Théorème : $\forall \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \overset{\text{pp}}{\to} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$; si la suite $\tilde{f}_n$ est monotone on a $\tilde{f}_n \overset{\text{pp}}{\to} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \overset{\text{ms}}{\to} \tilde{f}$.

3.9. Théorème : $\forall \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \overset{\times}{\to} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \overset{\text{pp}}{\to} \tilde{f}$; si la suite $\tilde{f}_n$ est **dominée** on a $\tilde{f}_n \overset{\times}{\to} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \overset{\text{pp}}{\to} \tilde{f}$.

3.10. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est de Cauchy p.p. (C pp) ssi

$$\boxed{\forall\, \delta, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| > \varepsilon \} \Big\|_1 \leq \delta}\,.$$

3.11. Critère pratique : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C pp ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| > \varepsilon \} \Big\|_1 \leq \varepsilon}\,.$$

3.12. Théorème : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est de Cauchy p.p. ssi l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite $\alpha_n = \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \{ |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| > \varepsilon \} \Big\|_1 \to 0$

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite $\beta_n = \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \{ \tilde{f}_p - \tilde{f}_n > \varepsilon \} \Big\|_1 \to 0$

et la suite $\gamma_n = \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \{ \tilde{f}_n - \tilde{f}_p > \varepsilon \} \Big\|_1 \to 0$

3) $\forall\, \varepsilon > 0$ la suite $\delta_n = \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \big(\mathbb{1} \wedge |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| \big) \Big\|_1 \to 0$.

3.13. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est dominée p.p. (D pp) ssi

$$\boxed{\Big\| \operatorname*{Sup}_{n} \{ |\tilde{f}_n| \geq \alpha \} \Big\|_1 \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty}\,.$$

3.14. Théorème : On a le schéma d'implication suivant :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{C pp} & \Rightarrow & \text{C ms} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{D pp} & \Rightarrow & \text{D ms} \end{array}}$$

Pour une suite monotone on a de plus $\boxed{\text{D pp} \Leftrightarrow \text{D ms}}$ et $\boxed{\text{C pp} \Leftrightarrow \text{C ms}}$.

3.15. <u>Définition</u> : Une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est <u>totale</u> ssi elle est <u>croissante</u> et $\sigma_n \xrightarrow{1} \mathbb{1}$.

3.16. <u>Théorème</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ converge p.p. vers 0 ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe une suite <u>totale</u> $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \left|\tilde{f}_n\right| \leq \varepsilon}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \operatorname*{Inf}_{p \geq n} \left\{ \left|\tilde{f}_p\right| \leq \varepsilon \right\}$; alors σ_n est une suite totale et on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \left|\tilde{f}_n\right| \leq \left\{ \left|\tilde{f}_n\right| \leq \varepsilon \right\} \left|\tilde{f}_n\right| \leq \varepsilon$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\varepsilon > 0$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \widetilde{F}_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \left|\tilde{f}_p\right|$

et $\tau_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \left\{ \tilde{f}_p \geq \varepsilon \right\} = \left\{ \widetilde{F}_n \geq \varepsilon \right\}$; posons de plus $\tau = \operatorname*{Inf}_{n} \tau_n$;

on peut donc écrire $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \widetilde{F}_n \geq \tau_n\, \widetilde{F}_n \geq \tau_n\, \varepsilon \geq \tau\, \varepsilon$.

Soit une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \left|\tilde{f}_n\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$; on a alors aussi $\forall\, p \geq n \quad \sigma_n \left|\tilde{f}_p\right| = \sigma_n\, \sigma_p \left|\tilde{f}_p\right| \leq \sigma_n \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$; donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \widetilde{F}_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$; on en déduit $\sigma_n\, \tau\, \varepsilon \leq \sigma_n\, \widetilde{F}_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tau\, \varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, c-à-d $\sigma_n\, \tau \leq \dfrac{1}{2}$; en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\tau \leq \dfrac{1}{2}$; donc $\tau = 0$.

3.17.* <u>Corollaire</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ converge p.p. vers $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe une suite <u>totale</u> $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \left|\tilde{f}_n - \tilde{f}\right| \leq \varepsilon}$.

3.18.* <u>Corollaire</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C pp ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe une suite <u>totale</u> $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall\, p > n \quad \sigma_n \left|\tilde{f}_p - \tilde{f}_n\right| \leq \varepsilon}$.

§ 4. <u>Dérivée de la primitive d'une fonctionnelle sommable</u>

Rappelons que si J est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors $\left|\mathsf{J}\right|$ représente sa longueur.

4.1. <u>Lemme de Vitali</u> : Soit $\left\{ \mathsf{J}_1, \ldots, \mathsf{J}_n \right\}$ une famille finie d'intervalles bornés de $\mathbb{R}$, on pose $\mathsf{S} = \bigcup_i \mathsf{J}_i$; alors il existe une sous-famille $\left\{ \mathsf{J}_{p_1}, \ldots, \mathsf{J}_{p_\nu} \right\}$ telle que

1) $i \neq j \;\Rightarrow\; \mathsf{J}_{p_i} \cap \mathsf{J}_{p_j} = \emptyset$ $\big($les J_{p_i} sont disjoints$\big)$

2) $\boxed{\sum_{i=1}^{\nu} \left|\mathsf{J}_{p_i}\right| \geq \dfrac{1}{3} \left\| \mathbb{1}_{\mathsf{S}} \right\|_1}$.

Dém : On peut supposer $\left|\mathsf{J}_1\right| \geq \left|\mathsf{J}_2\right| \geq \ldots \geq \left|\mathsf{J}_n\right|$; on choisit $p_1 = 1$;
on choisit p_2 minimum tel que $\mathsf{J}_{p_2} \cap \mathsf{J}_{p_1} = \emptyset$;
on choisit p_3 minimum tel que $\mathsf{J}_{p_3} \cap \left(\mathsf{J}_{p_1} \cup \mathsf{J}_{p_2}\right) = \emptyset$, et ainsi de suite.

On arrête le processus dès qu'il n'existe plus de J_q disjoint de la réunion des J_{p_i} déjà choisis ; on appelle $\nu \leq n$ le nombre total de J_{p_i} choisis.

$\forall\, 1 \leq i \leq \nu$ appelons $\mathsf{J}_{p_i}^{\bullet}$ l'intervalle fermé de même centre que J_{p_i} et de longueur trois fois plus grande ; soit $q \leq n$ tel que J_q n'a pas été choisi, et supposons $p_k < q < p_{k+1}$; alors $\mathsf{J}_q \cap \left(\mathsf{J}_{p_1} \cup \mathsf{J}_{p_2} \cup \ldots \cup \mathsf{J}_{p_k}\right) \neq \emptyset$; comme pour $1 \leq i \leq p_k$ la longueur de J_q est inférieure à celle de chacun des J_{p_i}, on a nécessairement $\mathsf{J}_q \subset \mathsf{J}_{p_1}^{\bullet} \cup \mathsf{J}_{p_2}^{\bullet} \cup \ldots \cup \mathsf{J}_{p_k}^{\bullet}$; donc $\mathsf{S} \subset \mathsf{J}_{p_1}^{\bullet} \cup \mathsf{J}_{p_2}^{\bullet} \cup \ldots \cup \mathsf{J}_{p_k}^{\bullet}$, donc $\left\|\mathbb{1}_{\mathsf{S}}\right\|_1 \leq 3 \sum_{i=1}^{\nu} \left|\mathsf{J}_{p_i}\right|$.

4.2. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on pose $\underline{\forall\, s\,,\, t > 0}$ $\quad \forall\, x \in [a\,,b]$

$$\boxed{\Phi_{s\,,t}(\tilde{f})(x) = \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} \tilde{f}(u)\, du}\,.$$

On convient de prolonger $\tilde{f}$ par 0 en dehors de $[a\,,b]$ afin que cette expression ait bien un sens $\forall\, s > 0$ et $\forall\, t > 0$. Remarquons que $\forall\, s\,,\, t > 0$ $\;\Phi_{s\,,t}(\tilde{f}) \in \mathcal{C}$.

4.3. Lemme :

Soit $\tilde{h} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$ et $\varepsilon > 0$; posons $\mathsf{R} = \bigcup_{s+t \leq 1} \left\{x \in [a\,,b] \,\|\, \Phi_{s\,,t}(\tilde{h})(x) > \varepsilon\right\}$;

alors R est un ouvert de $[a\,,b]$ et $\boxed{\|\mathbb{1}_{\mathsf{R}}\|_1 = \left\|\operatorname{Sup}_{s+t \leq 1} \left\{\Phi_{s\,,t}(\tilde{h}) > \varepsilon\right\}\right\|_1 \leq \frac{3}{\varepsilon}\, \|\tilde{h}\|_1}$.

Dém : R est un ouvert de $[a\,,b]$ car $\Phi_{s\,,t}(\tilde{h})$ est une fonction continue sur $[a\,,b]$.

Soit $x \in \mathsf{R}$; alors il existe $s > 0$ et $t > 0$ tels que $s + t \leq 1$ et $\Phi_{s\,,t}(\tilde{h})(x) > \varepsilon$, c-à-d $\displaystyle\int_{x-s}^{x+t} \tilde{h}(u)\, du > \varepsilon\,(s+t)$. Pour chaque $x \in \mathsf{R}$ choisissons s et t vérifiant les propriétés ci-dessus et posons $\mathsf{J}_x = \,]\, x - s\,,\, x + t\,[$; la famille des J_x recouvre R.

Soit alors K une réunion finie d'intervalles fermés inclus à R ; comme K est compact, un nombre fini des J_x recouvre déjà K ; grâce au lemme de Vitali on peut en choisir un certain nombre qui soient disjoints et dont la somme des longueurs soit supérieure à $\dfrac{1}{3}\, \|\mathbb{1}_{\mathsf{K}}\|_1$.

Soient $]\, x - s_i\,,\, x + t_i\,[$ ces intervalles ; la somme de leurs longueurs étant égale à $\sum_i s_i + t_i$, on peut écrire $\frac{1}{3}\,\|\,\mathbb{1}_{\mathsf{K}}\,\|_1 \leq \sum_i s_i + t_i < \frac{1}{\varepsilon} \sum_i \int_{x-s_i}^{x+t_i} \tilde{h}(u)\,du \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\|\,\tilde{h}\,\|_1$.

Comme $\|\,\mathbb{1}_{\mathsf{K}}\,\|_1$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de $\|\,\mathbb{1}_{\mathsf{R}}\,\|_1$, on en déduit $\|\,\mathbb{1}_{\mathsf{R}}\,\|_1 \leq \frac{3}{\varepsilon}\,\|\,\tilde{h}\,\|_1$.

4.4. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; alors $\boxed{\Phi_{s,t} \overset{\text{pp}}{\to} \tilde{f}}$ quand $s + t \to 0$, c-à-d

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\} = \operatorname*{Inf}_{\delta \geq 0}\ \operatorname*{Sup}_{s+t\leq\delta} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\} = 0\,.$$

<u>Dém</u> : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g \in \mathcal{E}$ tel que $\|\,\tilde{f} - g\,\|_1 \leq \varepsilon^2$; on peut écrire

$$\Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\} = \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f} - g) + \Phi_{s,t}(g) - g - (\tilde{f} - g)\,| > \varepsilon\Big\}$$

$$\leq \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f} - g)| + |\,\Phi_{s,t}(g) - g\,| + |\,\tilde{f} - g\,| > \varepsilon\Big\}$$

$$\leq \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f} - g)| > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(g) - g\,| > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \Big\{\,|\,\tilde{f} - g\,| > \frac{\varepsilon}{3}\Big\}$$

$$\leq \Big\{\Phi_{s,t}\big(|\,\tilde{f} - g\,|\big) > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(g) - g\,| > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \frac{3}{\varepsilon}\,|\,\tilde{f} - g\,|\,.$$

On en déduit $\overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\}$

$$\leq \overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\Phi_{s,t}\big(|\,\tilde{f} - g\,|\big) > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(g) - g\,| > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \frac{3}{\varepsilon}\,|\,\tilde{f} - g\,|\,.$$

Comme $g \in \mathcal{E}$, il est facile de voir que $\Phi_{s,t}(g) \overset{\text{pp}}{\to} g$ quand $s + t \to 0$; on a donc

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\} \leq \overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\Phi_{s,t}\big(|\,\tilde{f} - g\,|\big) > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \frac{3}{\varepsilon}\,|\,\tilde{f} - g\,|$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{s+t\leq 1} \Big\{\Phi_{s,t}\big(|\,\tilde{f} - g\,|\big) > \frac{\varepsilon}{3}\Big\} + \frac{3}{\varepsilon}\,|\,\tilde{f} - g\,|$$

$$\Big\|\,\overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\}\Big\|_1$$

$$\leq \Big\|\operatorname*{Sup}_{s+t\leq 1} \Big\{\Phi_{s,t}\big(|\,\tilde{f} - g\,|\big) > \frac{\varepsilon}{3}\Big\}\Big\|_1 + \frac{3}{\varepsilon}\,\|\,\tilde{f} - g\,\|_1$$

$$\leq \frac{9}{\varepsilon}\,\|\,\tilde{f} - g\,\|_1 + \frac{3}{\varepsilon}\,\|\,\tilde{f} - g\,\|_1 = \frac{12}{\varepsilon}\,\|\,\tilde{f} - g\,\|_1 \leq 12\,\varepsilon\,.$$

Par le CRITÈRE PRATIQUE 1 on en conclut $\overline{\operatorname{Lim}}_{s+t\to 0} \Big\{\,|\,\Phi_{s,t}(\tilde{f}) - \tilde{f}\,| > \varepsilon\Big\} = 0$.

§ 5. Convergence plate

5.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n\,,\,\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge platement vers $\tilde{f}$ ssi $\boxed{\{\tilde{f}_n \neq \tilde{f}\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \xrightarrow{1} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f}$.

5.2.* Théorème : La topologie de la convergence plate dans $\mathcal{L}^1$ est définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathsf{A}} = \|\mathrm{S}\,(\tilde{f})\|_1} \geq \|\tilde{f}\|_{\mathrm{ms}}$.

5.3.* Théorème : $\forall\, \tilde{f}_n\,,\,\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f} \;\Rightarrow\; \tilde{f}_n \xrightarrow{\mathrm{ms}} \tilde{f}$.

5.4. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est Cauchy-plate (C-plate) ssi la suite

$$\boxed{\alpha_n = \sup_{p>n} \|\{\tilde{f}_p \neq \tilde{f}_n\}\|_1 = \sup_{p>n} \|\mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_n)\|_1 \to 0} \,.$$

5.5.* Théorème : Une suite C-plate est C ms.

5.6. Théorème :

Une suite $\omega_n \in \mathcal{K}$ est C-plate ssi elle est de Cauchy pour la norme $\|\ \|_1$.

Dém :

On a $\forall\, n\,,\,p \in \mathbb{N}$ $\mathrm{S}\,(\omega_p - \omega_n) = \mathrm{S}\,\big(|\,\omega_p - \omega_n\,|\big) = |\,\omega_p - \omega_n|$, car $|\,\omega_p - \omega_n| \in \mathcal{K}$; on en déduit : ω_n C-plate $\Leftrightarrow$ ω_n de Cauchy pour la norme $\|\ \|_1$.

§ 6. Convergence exacte

6.1. Définition : Soient $\tilde{f}_n\,,\,\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on dit que $\tilde{f}_n$ converge exactement vers $\tilde{f}$ ssi $\boxed{\{\tilde{f}_n \neq \tilde{f}\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \xrightarrow{\times} 0}$. On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \tilde{f}$.

6.2.* Théorème : $\forall\, \tilde{f}_n\,,\,\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \tilde{f} \;\Rightarrow\; \big(\, \tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f}$ et $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathrm{pp}} \tilde{f}\,\big)$; si $\tilde{f}_n$ est monotone on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \tilde{f} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{A}} \tilde{f}$.

6.3. Définition : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est Cauchy-exacte (C-exacte) ssi la suite

$$\boxed{\alpha_n = \Big\|\, \operatorname*{Sup}_{p>n} \{\tilde{f}_p \neq \tilde{f}_n\} \Big\|_1 = \Big\|\, \operatorname*{Sup}_{p>n} \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_n) \Big\|_1 \to 0} \,.$$

6.4. <u>Théorème</u> :

Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ssi $\boxed{\left\{\tilde{f}_{n+1} \neq \tilde{f}_n\right\} = \mathrm{S}\,(\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n) \overset{\times}{\to} 0}$,

c-à-d ssi $\boxed{\left\| \underset{p \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\,(\tilde{f}_{p+1} - \tilde{f}_p) \right\|_1 \to 0}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, n\,,\, r \in \mathbb{N} \quad \left|\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right| \leq \left|\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_n\right| + \left|\tilde{f}_r - \tilde{f}_n\right|$,

donc $\mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right) \leq \mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_n\right) \vee \mathrm{S}\left(\tilde{f}_r - \tilde{f}_n\right)$;

donc $\underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right) \leq \underset{p > n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_n)$.

Par ailleurs on a $\forall\, p > n \quad \left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_p\right| \leq \sum_{r=n}^{p-1} \left|\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right|$,

donc $\mathrm{S}\left(\tilde{f}_n - \tilde{f}_p\right) \leq \underset{n \leq r \leq p-1}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right) \leq \underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right)$;

donc $\underset{p > n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}_p) \leq \underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right)$.

On en déduit $\underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\left(\tilde{f}_{r+1} - \tilde{f}_r\right) = \underset{p > n}{\mathrm{Sup}}\ \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p - \tilde{f}_n)$; d'où le théorème.

6.5.* <u>Théorème</u> : Une suite C-exacte est C-plate et C pp.

6.6.* <u>Théorème</u> : Une suite $\omega_n \in \mathcal{K}$ est C-exacte ssi elle est C-fine.

6.7. <u>Définition</u> : Une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est <u>déclinante</u> ssi elle est décroissante et $\sigma_n \overset{1}{\to} 0$.
La suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est donc déclinante ssi la suite $1 - \sigma_n$ est totale.

6.8. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\omega_n \in \mathcal{K}$; alors $\omega_n \overset{\times}{\to} 0$ ss'il existe une suite déclinante $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \omega_n \leq \sigma_n}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: La suite $\sigma_n = \underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \omega_r$ est déclinante et on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \omega_n \leq \sigma_n$.

b) $\Leftarrow$: On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \omega_r \leq \underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \sigma_r = \sigma_n$; donc $\underset{r \geq n}{\mathrm{Sup}}\ \omega_r \overset{1}{\to} 0$.

6.9. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$; alors $\tilde{f}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} 0$ ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n = 0}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On a $\mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) \overset{\times}{\to} 0$; il existe donc une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que
$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \leq 1 - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)$; donc $\sigma_n\, \tilde{f}_n = \sigma_n \left[1 - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)\right] \tilde{f}_n = \sigma_n \left[\tilde{f}_n - \tilde{f}_n\, \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)\right]$
$= \sigma_n\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}_n) = 0$.

b) $\Leftarrow$: On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \left[1 - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)\right] = \sigma_n - \sigma_n\, \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) = \sigma_n - \mathrm{S}\,(\sigma_n\, \tilde{f}_n) = \sigma_n$; donc $\sigma_n \le 1 - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)$, donc $\mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) \overset{\times}{\to} 0$.

6.10. <u>Théorème</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \le \{\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n\}}$.

<u>Dém</u> : La suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ssi $\{\tilde{f}_{n+1} \ne \tilde{f}_n\} \overset{\times}{\to} 0$, c-à-d ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \{\tilde{f}_{n+1} \ne \tilde{f}_n\} \le 1 - \sigma_n$, ou encore ssi $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n \le \{\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n\}$.

6.11. <u>Lemme</u> : Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ et $\sigma \in \mathcal{K}$; alors on a $\sigma \le \{\tilde{f} = \tilde{g}\} \Leftrightarrow \sigma\, \tilde{f} = \sigma\, \tilde{g}$.

<u>Dém</u> : On pose $\tau = \{\tilde{f} = \tilde{g}\}$.

a) $\Rightarrow$: On a $\sigma \le \tau$, donc $\sigma\, \tilde{f} = \sigma\, \tau\, \tilde{f} = \sigma\, \tau\, \tilde{g} = \sigma\, \tilde{g}$.

b) $\Leftarrow$: $\sigma\, \tau = \sigma \left[1 - \mathrm{S}\,(\tilde{f} - \tilde{g})\right] = \sigma - \mathrm{S}\,(\sigma\, \tilde{f} - \sigma\, \tilde{g}) = \sigma$, donc $\sigma \le \tau$.

6.12.* <u>Corollaire</u> : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ est C-exacte ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n = \sigma_n\, \tilde{f}_{n+1}}$.

6.13. <u>Définition</u> : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite C-exacte ; alors toute suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \le \{\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n\}$ $\big($c-à-d $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n = \sigma_n\, \tilde{f}_{n+1}\big)$ s'appelle une $\boxed{\text{présentation}}$ de la suite $\tilde{f}_n$.

6.14. <u>Théorème</u> : Soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite C-exacte $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$; alors on a $\boxed{\forall\, n, p \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\, \tilde{f}_n = \sigma_n\, \tilde{f}_{n+p}}$.

<u>Dém</u> : On a $\sigma_n\, \tilde{f}_n = \sigma_n\, \tilde{f}_{n+1} = \sigma_n\, \sigma_{n+1}\, \tilde{f}_{n+1} = \sigma_n\, \sigma_{n+1}\, \tilde{f}_{n+2} = \sigma_n\, \tilde{f}_{n+2} = \cdots$.

<u>Récapitulatif</u> : <u>Convergences dans $\mathcal{L}^1$</u>

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \times & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 2 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \mathrm{pp} & \Rightarrow & \mathrm{ms} & & \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \\ \mathsf{E} & \Rightarrow & \mathsf{A} & & \end{array}}$$

CHAPITRE XI

FONCTIONNELLES SUR [a,b]

Nous construisons l'espace vectoriel des *(classes de) fonctions mesurables* sur [a,b], que nous appellerons simplement *fonctionnelles* sur [a,b]. Cet espace s'obtient en *complétant* l'espace $\not{\mathcal{B}}$ pour la *convergence exacte* ; nous effectuons cette complétion par la méthode des *suites de Cauchy* ; bien que la convergence exacte ne soit pas une convergence métrique, le procédé conserve ici toute sa validité et toute son efficacité.

Remarque : Il est bien connu que la complétion par les suites de Cauchy constitue la plus mauvaise des méthodes, *même quand il n'y en a pas d'autre*. Son application au cas des fonctionnelles semble pourtant relativement justifiée : on ne cherche pas en effet à compléter "`entre`", mais à compléter "`au-delà`". Autrement dit les fonctionnelles ne constituent pas des éléments "plus fins" que les fonctionnelles sommables de $\mathcal{L}^1$, mais des éléments "trop grands" pour être dans $\mathcal{L}^1$. Dès lors les suites de Cauchy utilisées sont essentiellement des suites qui "tendent vers l'infini", et non des suites qui convergent vers des éléments "cachés" à l'intérieur de $\mathcal{L}^1$.

Une comparaison se révélera éclairante : définir les réels à partir des suites de Cauchy de rationnels constitue une manifestation typique d'*hystérie* mathématique. Par contre définir $+\infty$ comme l'ensemble des suites réelles convergeant vers $+\infty$ représente un procédé authentiquement valable de description de la nature de $+\infty$.

§ 1. Suites Cauchy-exactes dans $\not{\mathcal{B}}$

1.1. Définition : $\boxed{\text{On note } \mathcal{SX} \text{ l'espace vectoriel des suites Cauchy-exactes dans } \not{\mathcal{B}}.}$

1.2. Définition : Soients $F = (\tilde{f}_n)$, $G = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$; alors on pose

$$\boxed{F \sim G \quad \text{ssi} \quad \tilde{f}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0}\,, \text{ c-à-d } \boxed{F \sim G \quad \text{ssi} \quad \{\tilde{f}_n \neq \tilde{g}_n\} \xrightarrow{\times} 0}.$$

1.3. Théorème : Soients $F = (\tilde{f}_n)$, $G = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$; alors $F \sim G$ ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \tilde{f}_n = \sigma_n \tilde{g}_n}$.

Dém : $F \sim G \Leftrightarrow \tilde{f}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$

$\Leftrightarrow$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n (\tilde{f}_n - \tilde{g}_n) = 0$.

1.4.* Corollaire : La relation " $\sim$ " est une $\boxed{\text{relation d'équivalence}}$ sur $\mathcal{SX}$.

1.5. <u>Définition</u> : $\forall$ $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$ on pose

$$\mathrm{F}+\mathrm{G} = (\tilde{f}_n + \tilde{g}_n) \qquad \mathrm{F}\vee\mathrm{G} = (\tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n) \qquad \mathrm{F}\wedge\mathrm{G} = (\tilde{f}_n \wedge \tilde{g}_n) \qquad \mathrm{F}\,.\,\mathrm{G} = (\tilde{f}_n\,.\,\tilde{g}_n)\,.$$

1.6.* <u>Théorème</u> :

$\forall$ $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathcal{SX}$, $\mathrm{F}+\mathrm{G}$, $\mathrm{F}\vee\mathrm{G}$, $\mathrm{F}\wedge\mathrm{G}$, $\mathrm{F}\,.\,\mathrm{G}$ sont des éléments de $\mathcal{SX}$.

1.7.* <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{F}', \mathrm{G} \in \mathcal{SX}$ et $\mathrm{F} \sim \mathrm{F}'$; alors on a

$$\mathrm{F}+\mathrm{G} \sim \mathrm{F}'+\mathrm{G} \qquad \mathrm{F}\vee\mathrm{G} \sim \mathrm{F}'\vee\mathrm{G} \qquad \mathrm{F}\wedge\mathrm{G} \sim \mathrm{F}'\wedge\mathrm{G} \qquad \mathrm{F}\,.\,\mathrm{G} \sim \mathrm{F}'.\mathrm{G}\,.$$

1.8. <u>Définition</u> : $\forall$ $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ on pose

$$-\mathrm{F} = (-\tilde{f}_n) \qquad \mathrm{F}^+ = (\,\tilde{f}_n^+\,) \qquad \mathrm{F}^- = (\,\tilde{f}_n^-\,) \qquad |\mathrm{F}| = \big(\,|\tilde{f}_n|\,\big)\,.$$

1.9.* <u>Théorème</u> : $\forall$ $\mathrm{F} \in \mathcal{SX}$, $-\mathrm{F}$, F^+, F^-, $|\mathrm{F}|$ sont des éléments de $\mathcal{SX}$.

1.10.* <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{F}' \in \mathcal{SX}$ et $\mathrm{F} \sim \mathrm{F}'$; alors on a

$$-\mathrm{F} \sim -\mathrm{F}' \qquad \mathrm{F}^+ \sim \mathrm{F}'^+ \qquad \mathrm{F}^- \sim \mathrm{F}'^- \qquad |\mathrm{F}| \sim |\mathrm{F}'|$$

1.11. <u>Définition</u> : $\forall$ $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$ on pose

$$\boxed{\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{F}\vee\mathrm{G} \sim \mathrm{G}} \qquad (\,\text{ou} \quad \mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{F}\wedge\mathrm{G} \sim \mathrm{F}\,)\,.$$

1.12. <u>Théorème</u> : $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G}$ ssi $\boxed{\{\,\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\,\} \xrightarrow{\times} 0}$.

<u>Dém</u> : $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{F}\vee\mathrm{G} \sim \mathrm{G}$

$$\Leftrightarrow \; \tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$$

$$\Leftrightarrow \; \{\tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n \neq \tilde{g}_n\} \xrightarrow{\times} 0$$

$$\Leftrightarrow \; \{\,\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\,\} \xrightarrow{\times} 0\,.$$

1.13. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n)$, $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$; alors $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G}$ ss'il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,\tilde{f}_n \leq \sigma_n\,\tilde{g}_n}$.

<u>Dém</u> : $\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n - \tilde{g}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$

$\Leftrightarrow$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,(\tilde{f}_n \vee \tilde{g}_n - \tilde{g}_n) = 0$

$\Leftrightarrow$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\sigma_n\,\tilde{f}_n) \vee (\sigma_n\,\tilde{g}_n) = \sigma_n\,\tilde{g}_n$

$\Leftrightarrow$ il existe une suite totale $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n\,\tilde{f}_n \leq \sigma_n\,\tilde{g}_n\,.$

1.14. * Théorème : $\boxed{\big(\mathrm{F} \preceq \mathrm{G} \;\text{ et }\; \mathrm{G} \preceq \mathrm{F}\big) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{F} \sim \mathrm{G}}$.

1.15. * Théorème : La relation $\preceq$ est un $\boxed{\text{pré-ordre}}$ dans $\mathcal{SX}$.

§ 2. Supports et indicateurs

2.1. Théorème : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{B}$ une suite C-exacte et soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{f}_n$; alors on a $\boxed{\forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\, \mathrm{S}\,(\tilde{f}_m) - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)\,\big| \leq 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n}$.

Dém : Soient $m\,,\, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$; on a $\sigma_m\, \tilde{f}_m = \sigma_m\, \tilde{f}_n$, donc

$\tilde{f}_m = \sigma_m\, \tilde{f}_m + (1 - \sigma_m)\, \tilde{f}_m = \sigma_m\, \tilde{f}_n + (1 - \sigma_m)\, \tilde{f}_m = \tilde{f}_n + (1 - \sigma_m)\, (\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)$;

on en déduit $\tilde{f}_m = \tilde{f}_n + (1 - \sigma_m)\, (\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)$ (*) ;

on peut donc écrire $\big|\tilde{f}_m\big| \leq \big|\tilde{f}_n\big| + (1 - \sigma_m)\, \big|\tilde{f}_m - \tilde{f}_n\big|$, et donc

$\mathrm{S}\,(\tilde{f}_m) \leq \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) + (1 - \sigma_m)\, \mathrm{S}\,(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n) \leq \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) + 1 - \sigma_m$.

L'égalité (*) peut aussi s'écrire $\tilde{f}_n = \tilde{f}_m + (1 - \sigma_m)\, (\tilde{f}_n - \tilde{f}_m)$; donc

$\big|\tilde{f}_n\big| \leq \big|\tilde{f}_m\big| + (1 - \sigma_n)\, \big|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\big|$; on en déduit de même $\mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) \leq \mathrm{S}\,(\tilde{f}_m) + 1 - \sigma_m$;

en conclusion on obtient $\big|\, \mathrm{S}\,(\tilde{f}_m) - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)\,\big| \leq 1 - \sigma_m = 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n$.

2.2. Corollaire : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ la suite $\mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)$ converge finement dans $\mathcal{K}$.

Dém :

On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \operatorname*{Sup}_{p\,,\, q \,\geq\, n} \big|\, \mathrm{S}\,(\tilde{f}_p) - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_q)\,\big| \leq 1 - \sigma_p \wedge \sigma_q \leq 1 - \sigma_n$; comme $\sigma_n \xrightarrow{1} 1$,

la suite $\mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)$ est fine ; or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) \in \mathcal{K}$, donc $\operatorname*{Lim}_n \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) \in \mathcal{K}$.

2.3. Définition : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ on pose

$$\boxed{\underline{\text{support}} \text{ de } \mathrm{F} = \mathrm{S}\,(\mathrm{F}) = \operatorname*{Lim}_n \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n) \in \mathcal{K}}\,.$$

2.4. * Théorème : Soit $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ et soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{f}_n$; alors on a $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\, \mathrm{S}\,(\mathrm{F}) - \mathrm{S}\,(\tilde{f}_n)\big| \leq 1 - \sigma_n}$.

2.5. * Théorème : $\forall\ \mathrm{F} \in \mathcal{SX} \quad \mathrm{S}\,(\mathrm{F}) = \mathrm{S}\,(\mathbb{1} \wedge |\mathrm{F}|)$.

2.6.* Théorème : Soient $F, G \in \mathcal{SX}$; alors on a $\boxed{F \sim G \;\Rightarrow\; S(F) \sim S(G)}$.

2.7. Théorème : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{B}$ une suite C-exacte et soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{f}_n$; soit de plus $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$; alors on a

$$\boxed{\forall\, m, n \in \mathbb{N} \quad \left|\left\{\tilde{f}_m > \tilde{g}\right\} - \left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\}\right| \leq 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n}.$$

Dém : On a $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$ $\sigma_m \tilde{f}_m = \sigma_m \tilde{f}_n$, donc

$\tilde{f}_m = \sigma_m \tilde{f}_m + (1-\sigma_m)\,\tilde{f}_m = \sigma_m \tilde{f}_n + (1-\sigma_m)\,\tilde{f}_m = \tilde{f}_n + (1-\sigma_m)\,(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)$;

on en déduit $\tilde{f}_m = \tilde{f}_n + (1-\sigma_m)\,(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)$ (*) ; on peut donc écrire

$$\tilde{f}_m - \tilde{g} = \tilde{f}_n - \tilde{g} + (1-\sigma_m)\,(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)$$

$$(\tilde{f}_m - \tilde{g})^+ \leq (\tilde{f}_n - \tilde{g})^+ + (1-\sigma_m)\,(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)^+\,,$$

et donc $S\left[(\tilde{f}_m - \tilde{g})^+\right] \leq S\left[(\tilde{f}_n - \tilde{g})^+\right] + (1-\sigma_m)\, S\left[(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n)^+\right]$

$\leq S\left[(\tilde{f}_n - \tilde{g})^+\right] + 1 - \sigma_m$, c-à-d $\left\{\tilde{f}_m > \tilde{g}\right\} \leq \left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\} + 1 - \sigma_m$.

L'égalité (*) peut aussi s'écrire $\tilde{f}_n = \tilde{f}_m + (1-\sigma_m)\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}_m)$; on en déduit donc

$\tilde{f}_n - \tilde{g} = \tilde{f}_m - \tilde{g} + (1-\sigma_m)\,(\tilde{f}_n - \tilde{f}_m)$, et donc aussi $\left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\} \leq \left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\} + 1 - \sigma_m$.

En conclusion on obtient $\left|\left\{\tilde{f}_m > \tilde{g}\right\} - \left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\}\right| \leq 1 - \sigma_m = 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n$.

2.8.* Corollaire : Soit $\tilde{g}_n \in \mathcal{B}$ une suite C-exacte et soit $\tau_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{g}_n$; soit de plus $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; alors on a

$$\boxed{\forall\, m, n \in \mathbb{N} \quad \left|\left\{\tilde{f} > \tilde{g}_m\right\} - \left\{\tilde{f} > \tilde{g}_n\right\}\right| \leq 1 - \tau_m \wedge \tau_n}.$$

2.9. Corollaire-Définition : Soient $F = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ et $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$; alors la suite $\left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\}$ converge finement dans $\mathcal{K}$ et on pose $\boxed{\left\{F > \tilde{g}\right\} = \operatorname*{Lim}_n \left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\}}$.

De plus si $\sigma_n \in \mathcal{K}$ est une présentation de la suite $\tilde{f}_n$ on a

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left|\left\{F > \tilde{g}\right\} - \left\{\tilde{f}_n > \tilde{g}\right\}\right| \leq 1 - \sigma_n}.$$

Dém : Idem que pour $S(F)$.

2.10. Corollaire-Définition : Soient $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$ et $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; alors la suite $\{\tilde{f} > \tilde{g}_n\}$ converge finement dans $\mathcal{K}$ et on pose $\boxed{\{\tilde{f} > \mathrm{G}\} = \operatorname*{Lim}_n \{\tilde{f} > \tilde{g}_n\}}$.

De plus si $\tau_n \in \mathcal{K}$ est une présentation de la suite $\tilde{g}_n$ on a

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\{\tilde{f} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f} > \tilde{g}_n\}\big| \leq 1 - \tau_n} .$$

Dém : Idem que pour $\mathrm{S}(\mathrm{F})$.

2.11. Théorème-Définition : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ et $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$; alors la suite $\{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}$ converge finement dans $\mathcal{K}$ et on pose $\boxed{\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} = \operatorname*{Lim}_n \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}}$.

De plus si σ_n et τ_n sont des présentations des suites $\tilde{f}_n$ et $\tilde{g}_n$ on a

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big| \leq 2 - \sigma_n - \tau_n} .$$

Dém : On a $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

$\big|\{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big| \leq \big|\{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big| + \big|\{\tilde{f}_n > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_n\}\big|$

$\leq 2 - \sigma_m \wedge \sigma_n - \tau_m \wedge \tau_n$. Le théorème en découle.

L'application $(\mathcal{SX})^2 \to \mathcal{K} : (\mathrm{F}, \mathrm{G}) \mapsto \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}$ est un indicateur de $\mathcal{SX}$.
On en déduit facilement la définition des autres indicateurs de $\mathcal{SX}$.

2.12. Théorème : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ et $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$; soient σ_n et τ_n des présentations des suites $\tilde{f}_n$ et $\tilde{g}_n$; alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\}\big| \leq 1 - \sigma_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\mathrm{F} > \tilde{g}_n\}\big| \leq 1 - \tau_n} .$$

Dém : On a $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

$\big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\}\big| \leq \big|\{\mathrm{F} > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\}\big| + \big|\{\tilde{f}_m > \tilde{g}_m\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_m\}\big|$

$+ \big|\{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{g}_m\}\big| \leq 2 - \sigma_m - \tau_m + 1 - \sigma_m \wedge \sigma_n + 1 - \sigma_m$

$= 4 - 2\,\sigma_m - \sigma_m \wedge \sigma_n - \tau_m$.

Il suffit ensuite de faire tendre m vers $+\infty$.

2.13.* Corollaire : Soient $\mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ et $\mathrm{G} = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{SX}$; alors on a

$$\boxed{\{\tilde{f}_n > \mathrm{G}\} \overset{\times}{\to} \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\{\mathrm{F} > \tilde{g}_n\} \overset{\times}{\to} \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}} .$$

§ 3. Fonctionnelles sur [a,b]

3.1. Définition : On pose $\boxed{\mathcal{FO} = \mathcal{SX}/\sim}$.

Les éléments de $\mathcal{FO}$ se nomment les **fonctionnelles** sur [a,b].

Les fonctionnelles sont donc les classes d'équivalence des suites Cauchy-exactes de fonctionnelles bornées, deux suites étant équivalentes ssi leur différence converge exactement vers 0.

On note les fonctionnelles de la manière suivante :

$$\boxed{\widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \text{ désigne la classe de } \mathrm{F} \in \mathcal{SX}}.$$

3.2. Définition : On pose $\widehat{\mathrm{F}} + \widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F}+\mathrm{G}}$ $\quad \widehat{\mathrm{F}} \vee \widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F} \vee \mathrm{G}}$

$$\widehat{\mathrm{F}} \wedge \widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}} \qquad \widehat{\mathrm{F}}\,.\,\widehat{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{F}\,.\,\mathrm{G}}$$

$$-\widehat{\mathrm{F}} = \widehat{-\mathrm{F}} \qquad \widehat{\mathrm{F}}^{+} = \widehat{\mathrm{F}^{+}} \qquad \widehat{\mathrm{F}}^{-} = \widehat{\mathrm{F}^{-}} \qquad |\widehat{\mathrm{F}}| = \widehat{|\mathrm{F}|}.$$

3.3. Définition : On pose $\boxed{\widehat{\mathrm{F}} \le \widehat{\mathrm{G}} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{F} \preceq \mathrm{G}}$; c'est un $\boxed{\text{ordre}}$ dans $\mathcal{FO}$.

3.4. Théorème : $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{FO}$.

Dém : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; on pose $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \left\{ |\tilde{f}| \le n \right\}$ et $\tilde{f}_n = \sigma_n \tilde{f} \in \mathcal{B}$; alors on identifie $\tilde{f}$ à la classe de la suite $(\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$.

Si $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ on identifie $\tilde{f}$ à la classe de la suite constante $(\tilde{f}) \in \mathcal{SX}$.

3.5. Définition : On pose $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO}$: $\boxed{\underline{\text{support}} \text{ de } \widehat{\mathrm{F}} = \mathrm{S}(\widehat{\mathrm{F}}) = \mathrm{S}(\mathrm{F})}$.

3.6. Définition : On pose $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO}$: $\boxed{\left\{\widehat{\mathrm{F}} > \widehat{\mathrm{G}}\right\} = \{\mathrm{F} > \mathrm{G}\}}$.

L'application $(\mathcal{FO})^2 \to \mathcal{K} : \left(\widehat{\mathrm{F}}, \widehat{\mathrm{G}}\right) \mapsto \left\{\widehat{\mathrm{F}} > \widehat{\mathrm{G}}\right\}$ est un indicateur de $\mathcal{FO}$.
On en déduit facilement la définition des autres indicateurs de $\mathcal{FO}$.

3.7. Théorème : Les opérations définies sur $\mathcal{FO}$ prolongent les opérations sur $\mathcal{L}^1$; de même l'ordre sur $\mathcal{FO}$ prolonge l'ordre sur $\mathcal{L}^1$; les propriétés de ces opérations et de cet ordre sur $\mathcal{FO}$ prolongent celles de $\mathcal{L}^1$; enfin les propriétés du support dans $\mathcal{FO}$ prolongent les propriétés du support dans $\mathcal{L}^1$. La démonstration de ces propriétés se fait élémentairement à partir de la construction de $\mathcal{FO}$. On en déduit en particulier :

3.8. <u>Théorème</u> : $\boxed{\mathcal{FO} \text{ est un algébromodule de Riesz sur } \widehat{\mathcal{W}}.}$

Voici quelques autres propriétés dans $\mathcal{FO}$:

3.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \qquad {}^1\!\lim_{\alpha \to +\infty} \big\{ |\widehat{\mathrm{F}}| > \alpha \big\} = 0\,.$

3.10. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \qquad {}^1\!\lim_{\varepsilon \to 0^+} \big\{ \widehat{\mathrm{F}} \geq \varepsilon \big\} \;=\; {}^1\!\lim_{\varepsilon \to 0^+} \big\{ \widehat{\mathrm{F}} > \varepsilon \big\} \;=\; \big\{ \widehat{\mathrm{F}} > 0 \big\}\,.$

3.11. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \qquad \mathrm{S}\,(\widehat{\mathrm{F}}) \;=\; {}^1\!\lim_{p \to +\infty} \mathbb{1} \wedge \big(p\,|\widehat{\mathrm{F}}| \big)\,.$

3.12. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \qquad \mathrm{S}\,(\widehat{\mathrm{F}})\, \widehat{\mathrm{F}} = \widehat{\mathrm{F}}\,.$

3.13. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}} \in \mathcal{FO} \qquad \Big[\, \mathrm{S}\,(\widehat{\mathrm{F}}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \widehat{\mathrm{F}} = 0 \,\Big]\,.$

3.14. <u>Théorème</u> : $\forall\, \widehat{\mathrm{F}}, \widehat{\mathrm{G}} \in \mathcal{FO} \qquad \mathrm{S}\,(\widehat{\mathrm{F}}\,\widehat{\mathrm{G}}) = \mathrm{S}\,(\widehat{\mathrm{F}})\, \mathrm{S}\,(\widehat{\mathrm{G}})\,.$

<u>Récapitulatif</u>

$$
\boxed{
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \widehat{\mathcal{W}} & & & & & & \mathcal{FO} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & & & & & \\
\mathcal{E} & \subset & \mathcal{R} & \subset & \mathcal{BA} & \subset & \mathcal{PR} & \subset & \mathcal{W} & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{B} & \subset & \mathcal{L}^2 & \subset & \mathcal{L}^1 & \subset & \mathcal{M}_D & \subset & \mathcal{M} & \subset & \mathcal{PM} \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & & & & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & \mathcal{C} & & \mathcal{S} & & & & \mathcal{Z} & & \mathcal{K} & & & & & & \mathcal{N}_D & \subset & \mathcal{N} & \subset & \mathcal{PN} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathcal{A} & \subset & \mathcal{PA}
\end{array}
}
$$

§ 4. <u>Modes de convergence dans $\mathcal{FO}$</u>

4.1. <u>Définition</u> : On définit dans $\mathcal{FO}$ les quatre modes de convergence ms, p.p., A, E par les mêmes définitions formelles que dans $\mathcal{L}^1$. Ils ont les mêmes propriétés que dans $\mathcal{L}^1$. En particulier on a le même schéma d'implication :

$$
\boxed{
\begin{array}{ccc}
\mathsf{E} & \Rightarrow & \mathsf{A} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\mathrm{pp} & \Rightarrow & \mathrm{ms}
\end{array}
}
$$

4.2. Théorème :

Les lois $+$, $\times$, $\vee$, $\wedge$ sont *continues* pour les quatre modes de convergence.

Nous allons détailler ces quatre modes pour en donner les propriétés les plus significatives.

Nous abandonnerons désormais le "chapeau" dans la notation des éléments de $\mathcal{FO}$.

A. Convergence en mesure

A.1. Définition : Soient F_n , $F_n \in \mathcal{FO}$; alors $F_n \overset{ms}{\to} F$ ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \{ | F_n - F | > \varepsilon \} \overset{1}{\to} 0} .$$

A.2. Définition : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est de Cauchy en mesure (C ms) ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \text{ il existe } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall p > n \quad \left\| \{ | F_p - F_n | > \varepsilon \} \right\|_1 \le \varepsilon} .$$

A.3. Théorème : Soient F_n , $F \in \mathcal{FO}$, $F_n \overset{ms}{\to} F$; alors on a

$$\boxed{\left\| \{ F > 0 \} \right\|_1 \le \underline{\lim}_{n} \ \left\| \{ F_n > 0 \} \right\|_1}$$

Dém :

On a $\forall \varepsilon > 0 \quad \{ F > \varepsilon \} = \{ F - F_n + F_n > \varepsilon \} \le \{ F - F_n > \varepsilon \} + \{ F_n > 0 \}$,

donc $\left\| \{ F > \varepsilon \} \right\|_1 \le \left\| \{ F - F_n > \varepsilon \} \right\|_1 + \left\| \{ F_n > 0 \} \right\|_1$, donc $\forall \varepsilon > 0$

$\left\| \{ F > \varepsilon \} \right\|_1 \le \underline{\lim}_{n} \ \left\| \{ F_n > 0 \} \right\|_1$; en faisant $\varepsilon \to 0^+$ on obtient le théorème.

A.4.* Corollaire : Soient F_n , $F \in \mathcal{FO}$, $F_n \overset{ms}{\to} F$; alors on a

$$\boxed{\left\| S(F) \right\|_1 \le \underline{\lim}_{n} \ \left\| S(F_n) \right\|_1}$$

A.5. Définition : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est dominée en mesure (D ms) ssi

$$\boxed{\sup_{n \in \mathbb{N}} \ \left\| \{ | F_n | > \alpha \} \right\|_1 \to 0 \ \text{ quand } \ \alpha \to +\infty} .$$

A.6. Théorème : $\boxed{\text{C ms} \ \Rightarrow \ \text{D ms}}$.

Dém : On peut supposer $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \ge 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et soit $p \in \mathbb{N}$

tel que $\sup\limits_{n > p} \left\| \{ F_n - F_p > \varepsilon \} \right\|_1 \le \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\left\| \{ F_p > \alpha - 1 \} \right\|_1 \le \varepsilon$;

on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \{F_n > \alpha\} = \{F_n > \alpha\}\{F_n \leq F_p + \varepsilon\} + \{F_n > \alpha\}\{F_n > F_p + \varepsilon\}$

$\leq \{F_p + \varepsilon > \alpha\} + \{F_n > F_p + \varepsilon\} \leq \{F_p > \alpha - 1\} + \{F_n > F_p + \varepsilon\}$.

On en déduit $\forall\, n \geq p \quad \big\| \{F_n > \alpha\} \big\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.

A.7. <u>Théorème de complétude</u> : $\boxed{\mathcal{FO} \text{ est complet pour la convergence en mesure.}}$

Avant de démontrer ce théorème précisons sa signification.

- Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ converge en mesure vers $F \in \mathcal{FO}$ <u>ssi</u>

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim_n} \ \big\| \{\, | F_n - F | > \varepsilon \} \big\|_1 \leq \varepsilon\ ,$$

c-à-d <u>ssi</u> $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p \geq n \quad \big\| \{\, | F_p - F | > \varepsilon \} \big\|_1 \leq \varepsilon$,

c-à-d <u>ssi</u> $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p \geq n$

$$\big\| \{F_p > F + \varepsilon\} \big\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \big\| \{F > F_p + \varepsilon\} \big\|_1 \leq \varepsilon .$$

- Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est C ms <u>ssi</u> $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p > n$

$$\big\| \{F_p > F_n + \varepsilon\} \big\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \big\| \{F_n > F_p + \varepsilon\} \big\|_1 \leq \varepsilon .$$

Le théorème affirme que pour toute suite $F_n \in \mathcal{FO}$ qui est C ms , il esiste $F \in \mathcal{FO}$ tel que $F_n \overset{\text{ms}}{\to} F$. La démonstration utilise plusieurs lemmes.

<u>*Lemme 1*</u> : Soit une suite $F_p \in \mathcal{FO}$; alors la suite F_p est C ms ssi les suites F_p^+ et F_p^- sont C ms.

<u>Dém</u> : Trivial.

Ce lemme nous permet de supposer dans la suite que $\forall\, p \in \mathbb{N} \quad F_p \in \mathcal{FO}^+$.

<u>*Lemme 2*</u> : Soit une suite $F_p \in \mathcal{FO}^+$ convergente en mesure et soit $n \in \mathbb{N}$; alors la suite $n \wedge F_p \in \mathcal{B}^+$ converge en norme $\|\ \|_1$ dans $\mathcal{B}^+$.

<u>Dém</u> : La suite $n \wedge F_p$ est encore C ms ; de plus elle est positive et bornée ; elle converge donc en norme $\|\ \|_1$ dans $\mathcal{B}^+$.

Posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\tilde g_n = {}^1\lim_p \ (n \wedge F_p)} \in \mathcal{B}^+$.

<u>*Lemme 3*</u> : On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \tilde g_{n+1} = \tilde g_n$.

Dém : On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \tilde{g}_{n+1} = n \wedge \left({}^1\lim_p \left[(n+1) \wedge \mathrm{F}_p \right] \right)$

$$= {}^1\lim_p \left[n \wedge (n+1) \wedge \mathrm{F}_p \right] = {}^1\lim_p \ (n \wedge \mathrm{F}_p) = \tilde{g}_n .$$

Lemme 4 : La suite $\tilde{g}_n$ est croissante.

Dém : Trivial.

Lemme 5 : La suite $\tilde{g}_n$ est D ms.

Dém : La suite F_p étant C ms ; elle est donc aussi D ms ;
soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \{ \mathrm{F}_p > \alpha \} \right\|_1 \leq \varepsilon$;
or $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \mathrm{F}_p \xrightarrow{1} \tilde{g}_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \mathrm{F}_p \xrightarrow{\mathrm{ms}} \tilde{g}_n$;
donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \{ \tilde{g}_n > \alpha \} \right\|_1 \leq \underline{\lim}_p \left\| \{ n \wedge \mathrm{F}_p > \alpha \} \right\|_1 \leq \underline{\lim}_p \left\| \{ \mathrm{F}_p > \alpha \} \right\|_1 \leq \varepsilon$.

Lemme 6 : La suite $\tilde{g}_n$ est exacte.

Dém : On a $\sup_r \left\| \{ \tilde{g}_r > \alpha \} \right\|_1 \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$; soit $n \in \mathbb{N}$;
posons $\forall r \in \mathbb{N} \quad \theta_r = \{ \tilde{g}_r > n \} \in \mathcal{K}$; la suite θ_r est croissante et bornée,
donc convergente en norme $\| \ \|_1$ vers $\tau_n = \operatorname{Sup}_r \theta_r = \operatorname{Sup}_r \{ \tilde{g}_r > n \} \in \mathcal{K}$;
la suite τ_n est décroissante et on a
$\|\tau_n\|_1 = \sup_r \|\theta_r\|_1 = \sup_r \left\| \{ \tilde{g}_r > n \} \right\|_1$, donc $\|\tau_n\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$;
on en déduit que la suite $\sigma_n = 1 - \tau_n = \operatorname{Inf}_r \{ \tilde{g}_r \leq n \}$ est totale.
De plus on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \leq \{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \}$, donc $\sigma_n \, \tilde{g}_{n+1} = \sigma_n \{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \} \, \tilde{g}_{n+1}$
$= \sigma_n \{ n \wedge \tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_{n+1} \} \, \tilde{g}_{n+1} = \sigma_n \{ n \wedge \tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_{n+1} \} (n \wedge \tilde{g}_{n+1})$
$= \sigma_n \{ \tilde{g}_{n+1} \leq n \} (n \wedge \tilde{g}_{n+1}) = \sigma_n \, \tilde{g}_n$. La suite $\tilde{g}_n$ est donc exacte.

Démonstration du théorème :

Notons $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}^+$ la fonctionnelle dont la suite $(\tilde{g}_n)$ est un représentant ; montrons qu'on a $\widehat{\mathrm{F}}_p \xrightarrow{\mathrm{ms}} \mathrm{G}$; soit $\varepsilon > 0$; nous démontrons d'abord $\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{G} + \varepsilon \} \xrightarrow{1} 0$, ensuite $\{ \mathrm{G} > \mathrm{F}_p + \varepsilon \} \xrightarrow{1} 0$.

1) Soit $0 < \varepsilon < 1$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N \quad \left\| \{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \} \right\|_1 \leq \varepsilon$;
on a $\forall p, q \geq N \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \{ \mathrm{F}_p > n \wedge \mathrm{F}_q + \varepsilon \} \leq \{ \mathrm{F}_p > n \wedge (\mathrm{F}_q + \varepsilon) \}$
$= \{ \mathrm{F}_p > n \} \vee \{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \}$, donc $\left\| \{ \mathrm{F}_p > n \wedge \mathrm{F}_q + \varepsilon \} \right\|_1$
$\leq \left\| \{ \mathrm{F}_p > n \} \right\|_1 + \left\| \{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \} \right\|_1 \leq \left\| \{ \mathrm{F}_p > n \} \right\|_1 + \varepsilon$;

or $n \wedge \mathrm{F}_q \overset{\mathrm{ms}}{\to} \tilde{g}_n$ quand $q \to +\infty$, donc $\forall p \geq N \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \tilde{g}_n + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varliminf_q \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \wedge \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \right\|_1 + \varepsilon$;

de plus quand $n \to +\infty$ $\left\{ \mathrm{F}_p > \tilde{g}_n + \varepsilon \right\} \overset{\times}{\to} \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{G} + \varepsilon \right\}$ et $\left\{ \mathrm{F}_p > n \right\} \overset{1}{\to} 0$,

donc $\forall p \geq N \quad \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{G} + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$.

2) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N \quad \left\| \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$;

on a $\forall p, q \geq N \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ n \wedge \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \leq \left\{ \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\}$, donc

$\left\| \left\{ n \wedge \mathrm{F}_p > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$; en faisant $p \to +\infty$ on trouve

$\forall q \geq N \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \left\{ \tilde{g}_n > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$; et en faisant $n \to +\infty$ on obtient

$\forall q \geq N \quad \left\| \left\{ \mathrm{G} > \mathrm{F}_q + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$.

A.8. <u>Théorème</u> : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ on a $\boxed{\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}}$.

<u>Dém</u> : $\forall \varepsilon > 0$ on a $\left\{ |f_n - \mathrm{F}| > \varepsilon \right\} \leq \left\{ f_n \neq \mathrm{F} \right\}$; on démontrera $\left\{ f_n \neq \mathrm{F} \right\} \overset{\times}{\to} 0$ au Théorème D.2 ; on obtient donc a fortiori $\left\{ f_n \neq \mathrm{F} \right\} \overset{1}{\to} 0$.

A.9. <u>Théorème</u> : $\underline{\mathcal{E}}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure.

<u>Dém</u> : Soit $(\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ un représentant de F ; soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{g}_n \in \mathcal{E}$ tel que $\tilde{f}_n - \tilde{g}_n \overset{1}{\to} 0$; on a donc aussi $\tilde{f}_n - \tilde{g}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0$; de plus $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$; on en déduit $\tilde{g}_n = \tilde{f}_n + (\tilde{g}_n - \tilde{f}_n) \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$.

A.10.* <u>Théorème</u> : $\underline{\mathcal{C}}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure.

A.11.* <u>Théorème</u> : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure.

A.12.* <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors $\boxed{\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F} \text{ ssi } \mathbb{1} \wedge |\mathrm{F}_n - \mathrm{F}| \overset{1}{\to} 0}$.

A.13.* <u>Corollaire</u> : La topologie de $\mathcal{FO}$ pour la convergence en mesure peut être définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{ms}} = \left\| \mathbb{1} \wedge |\mathrm{F}| \right\|_1}$.

A.14. <u>Définition</u> : Un espace de Riesz V muni d'une pseudo-norme $\| \ \|_§$ est un <u>espace pseudo-normé de Riesz</u> ssi $\boxed{\forall u, v \in \mathrm{V} \quad |u| \leq |v| \Rightarrow \|u\|_§ \leq \|v\|_§}$.

A.15.* <u>Théorème</u> : $(\mathcal{FO}, |\ \ |, \|\ \|_{\mathrm{ms}})$ est un espace pseudo-normé <u>complet</u> de Riesz.

B. Convergence presque partout

B.1. Définition : Soient $F_n, F_n \in \mathcal{FO}$; alors, $F_n \overset{\text{pp}}{\to} F$ ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \big\{|F_n - F| > \varepsilon\big\} \overset{\times}{\to} 0}\,.$$

B.2. Théorème : Soit $F \in \mathcal{FO}$; alors $\boxed{\alpha \wedge F \overset{\text{pp}}{\to} F \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty}$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; on a $\forall\, \alpha > 0 \quad \big\{F - \alpha \wedge F > \varepsilon\big\} = \big\{F - \varepsilon > \alpha \wedge F\big\}$
$= \big\{F - \varepsilon > \alpha\big\} \vee \big\{F - \varepsilon > F\big\} = \big\{F > \alpha + \varepsilon\big\} \overset{\times}{\to} 0$.

B.3. Définition : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est de Cauchy p.p. (C pp) ssi

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Big\| \operatorname*{Sup}_{p > n} \big\{|F_p - F_n| > \varepsilon\big\} \Big\|_1 \leq \varepsilon}\,.$$

B.4. Théorème : Soient $F_n, F \in \mathcal{FO}$, $F_n \overset{\text{pp}}{\to} F$; alors on a

$$\boxed{\big\{F > 0\big\} \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \big\{F_n > 0\big\}}\,.$$

Dém : On a $\forall \varepsilon > 0 \quad \big\{F > \varepsilon\big\} = \big\{F - F_n + F_n > \varepsilon\big\} \leq \big\{F - F_n > \varepsilon\big\} + \big\{F_n > 0\big\}$,
donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \big\{F > \varepsilon\big\} \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \big\{F_n > 0\big\}$; en faisant $\varepsilon \to 0^+$ on obtient le théorème.

B.5. Corollaire : Soient $F_n, F \in \mathcal{FO}$, $F_n \overset{\text{pp}}{\to} F$; alors on a $\boxed{S(F) \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} S(F_n)}$.

B.6. Théorème :

Soient $F_n, F \in \mathcal{FO}$, $F_n \overset{\text{ms}}{\to} F$; supposons de plus la suite F_n croissante ;
alors on a $\boxed{\big\{F_n > 0\big\} \overset{1}{\to} \big\{F > 0\big\}}$, et donc aussi $\boxed{S(F_n) \overset{1}{\to} S(F)}$.

Dém : Grâce à la monotonie de la suite F_n on a en fait $F_n \overset{\text{pp}}{\to} F$; de plus la suite $\big\{F_n > 0\big\}$ est croissante et majorée par $\big\{F > 0\big\}$; on peut donc écrire $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\overline{\operatorname*{Lim}}_{n} \big\{F_n > 0\big\} \leq \big\{F > 0\big\} \leq \underline{\operatorname*{Lim}}_{n} \big\{F_n > 0\big\}$; d'où le théorème.

B.7. Corollaire :

Soient $F_n, F, G \in \mathcal{FO}$, $F_n \overset{\text{ms}}{\to} \widehat{F}$; supposons de plus la suite F_n croissante ;
alors on a $\boxed{\big\{F_n > G\big\} \overset{1}{\to} \big\{F > G\big\}}$ et $\boxed{\big\{F_n \leq G\big\} \overset{1}{\to} \big\{F \leq G\big\}}$.

B.8. Définition : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est **dominée p.p.** (D pp) ssi

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |F_n| > \alpha \right\} \xrightarrow{1} 0 \quad \text{quand} \quad \alpha \to +\infty}.$$

B.9. Théorème : $\boxed{\mathrm{C\,pp} \Rightarrow \mathrm{D\,pp}}$.

Dém : On peut supposer $\forall n \in \mathbb{N} \;\; F_n \geq 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\left\| \operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_n - F_p > \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\left\| \operatorname*{Sup}_{n \leq p} \left\{ F_p > \alpha - 1 \right\} \right\|_1 \leq \varepsilon$;
on a $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \left\{ F_n > \alpha \right\} = \left\{ F_n > \alpha \right\} \left\{ F_n \leq F_p + \varepsilon \right\} + \left\{ F_n > \alpha \right\} \left\{ F_n > F_p + \varepsilon \right\}$
$\leq \left\{ F_p + \varepsilon > \alpha \right\} + \left\{ F_n > F_p + \varepsilon \right\} \leq \left\{ F_p > \alpha - 1 \right\} + \left\{ F_n > F_p + \varepsilon \right\}$.
On peut donc écrire $\operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_n > \alpha \right\} \leq \left\{ F_p > \alpha - 1 \right\} + \operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_n > F_p + \varepsilon \right\}$,
donc $\left\| \operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_n > \alpha \right\} \right\|_1 \leq \left\| \operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_p > \alpha - 1 \right\} \right\|_1 + \left\| \operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_n > F_p + \varepsilon \right\} \right\|_1 \leq 2\,\varepsilon$.
On en déduit $\left\| \operatorname*{Sup}_{n} \left\{ F_n > \alpha \right\} \right\|_1 \leq \left\| \operatorname*{Sup}_{n \leq p} \left\{ F_n > \alpha \right\} \right\|_1 + \left\| \operatorname*{Sup}_{n > p} \left\{ F_n > \alpha \right\} \right\|_1 \leq 3\,\varepsilon$.

B.10. Théorème : $\mathcal{FO}$ est complet pour la convergence p.p.

Dém : Soit $F_n \in \mathcal{FO}$ une suite C pp ; alors F_n est C ms.
Soit $F \in \mathcal{FO}$ tel que $F_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} F$; nous allons montrer $F_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} F$.
Soit $\varepsilon > 0$; on a $\forall n, p \in \mathbb{N} \;\; \left\{ |F_p - F| > \varepsilon \right\} \leq \left\{ |F_p - F_n| + |F_n - F| > \varepsilon \right\}$
$\leq \left\{ |F_p - F_n| > \varepsilon/2 \right\} + \left\{ |F_n - F| > \varepsilon/2 \right\}$; on peut donc écrire $\forall n \in \mathbb{N}$
$\operatorname*{Sup}_{p \geq n} \left\{ |F_p - F| > \varepsilon \right\} \leq \operatorname*{Sup}_{p > n} \left\{ |F_p - F_n| > \varepsilon/2 \right\} + \left\{ |F_n - F| > \varepsilon/2 \right\} \xrightarrow{1} 0$.

B.11. Théorème : $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence p.p.

Dém : Soit $(\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ un représentant de F ; on a $\tilde{f}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \widehat{F}$, donc $\tilde{f}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \widehat{F}$.
Soit $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \tilde{g}_n \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_n \left\| \tilde{f}_n - \tilde{g}_n \right\|_1 < +\infty$; alors $\tilde{f}_n - \tilde{g}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} 0$, donc $\tilde{g}_n = \tilde{f}_n + (\tilde{f}_n - \tilde{g}_n) \overset{\mathrm{pp}}{\to} F$.

B.12.* Théorème : $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence p.p.

B.13.* Théorème : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence p.p.

B.14. Définition : Une suite $F_n \in \mathcal{FO}$ est $\boxed{\textsf{dominée dans } \mathcal{FO}}$ ss'il existe $G \in \mathcal{FO}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; |F_n| \leq G$.

B.15. Théorème : Pour toute suite $F_p \in \mathcal{FO}$ on a $\boxed{F_p \text{ Dpp} \Leftrightarrow F_p \text{ dominée dans } \mathcal{FO}}$.

Dém : On peut supposer $\forall p \in \mathbb{N} \quad F_p \geq 0$.

a) $\Rightarrow$: Posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{g}_n = \operatorname*{Sup}_p \big(n \wedge \widehat{F}_p\big) \in \mathcal{B}^+$; la suite $\tilde{g}_n$ est croissante ; montrons que c'est une suite exacte ; posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n = \operatorname*{Inf}_p \big\{F_p \leq n\big\}$;

comme F_p est Dpp, la suite σ_n est totale. On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\{\tilde{g}_{n+1} \leq n\big\}$

$= \Big\{\operatorname*{Sup}_p \big[(n+1) \wedge F_p\big] \leq n\Big\} = \operatorname*{Inf}_p \Big\{(n+1) \wedge F_p \leq n\Big\} = \operatorname*{Inf}_p \big\{F_p \leq n\big\} = \sigma_n$;

de plus $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \wedge \tilde{g}_{n+1} = n \wedge \operatorname*{Sup}_p \big[(n+1) \wedge F_p\big] = \operatorname*{Sup}_p \big(n \wedge F_p\big) = \tilde{g}_n$,

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\{\tilde{g}_{n+1} = \tilde{g}_n\big\} = \big\{\tilde{g}_{n+1} = n \wedge \tilde{g}_{n+1}\big\} = \big\{\tilde{g}_{n+1} \leq n\big\} = \sigma_n \xrightarrow{1} 1$.

La suite $\tilde{g}_n$ est donc exacte ; posons $G = (\tilde{g}_n) \in \mathcal{FO}^+$; on a $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$n \wedge F_p \leq \tilde{g}_n \leq G$; en faisant $n \to +\infty$ on obtient $\forall p \in \mathbb{N} \quad F_p \leq G$.

b) $\Leftarrow$: On a $\operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \big\{F_p > \alpha\big\} \leq \big\{G > \alpha\big\} \xrightarrow{\times} 0$.

B.16. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{FO}$

Soit $F_n \in \mathcal{FO}$ une suite ***monotone*** et ***dominée dans*** $\mathcal{FO}$; alors F_n converge ***presque partout*** vers une fonctionnelle $F \in \mathcal{FO}$. On note $\boxed{F = \operatorname{Sup} F_n \ \underline{\text{ou}}\ \operatorname{Inf} F_n}$ suivant que la suite F_n est croissante ou décroissante.

Dém : Comme la suite F_n est monotone, il suffit de montrer que F_n est Cms.
On peut supposer la suite F_n croissante. On a $\forall \alpha > 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$

$F_p - F_q \leq F_p - \alpha \wedge F_q = F_p - \alpha \wedge F_p + \alpha \wedge F_p - \alpha \wedge F_q$.

Soit $\varepsilon > 0$; on a $\big\{F_p - F_q > \varepsilon\big\} \leq \big\{F_p - \alpha \wedge F_p > 0\big\} + \big\{\alpha \wedge F_p - \alpha \wedge F_q > \varepsilon\big\}$

$\leq \big\{F_p > \alpha\big\} + \big\{\alpha \wedge F_p - \alpha \wedge F_q > \varepsilon\big\} \leq \big\{G > \alpha\big\} + \big\{\alpha \wedge F_p - \alpha \wedge F_q > \varepsilon\big\}$.

Soit $G \in \mathcal{FO}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F_n| \leq G$; choisissons α tel que

$\big\|\big\{G > \alpha\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon/2$; la suite $\alpha \wedge F_n \in \mathcal{L}^1$ est croissante et majorée par α ;

elle converge donc en norme $\| \ \|_1$ et donc aussi en mesure ; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N \quad \big\|\big\{\alpha \wedge F_p - \alpha \wedge F_q > \varepsilon\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon/2$; on en déduit $\forall p, q \geq N$

$\big\|\big\{F_p - F_q > \varepsilon\big\}\big\|_1 \leq \varepsilon$. La suite F_n est donc Cms.

B.17. Définition : Soit $F_n \in \mathcal{FO}$ une suite dominée dans $\mathcal{FO}$. On pose

$$\boxed{\operatorname*{Sup}_n F_n = \operatorname*{Sup}_n \ F_0 \vee F_1 \vee \ldots \vee F_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname*{Inf}_n F_n = \operatorname*{Inf}_n \ F_0 \wedge F_1 \wedge \ldots \wedge F_n}.$$

Ce sont respectivement le <u>Suprémum</u> et l'<u>Infimum</u> de la suite F_n.

B.18. <u>Définition</u> : Soit $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ une suite <u>dominée dans $\mathcal{FO}$</u>. On pose

$$\boxed{\underline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{F}_n = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}}\ \operatorname*{Inf}_{p \in \mathbb{N}}\ \mathrm{F}_{n+p}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{F}_n = \operatorname*{Inf}_{n \in \mathbb{N}}\ \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}}\ \mathrm{F}_{n+p}}\ .$$

Ce sont respectivement la <u>Limite Inférieure</u> et la <u>Limite Supérieure</u> de la suite F_n.

B.19. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n\,,\,\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F}$ ssi $\boxed{\overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \left|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\right| = 0}$,

c-à-d ssi la suite $\boxed{\Phi_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n}\ \left|\mathrm{F}_p - \mathrm{F}\right| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0}$.

<u>Dém</u> : On peut supposer $\mathrm{F} = 0$; on a alors

$$\Big[\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \Psi_n = \big\{ |\mathrm{F}_n| > \varepsilon \big\} \overset{\times}{\to} 0\ \Big] \ \Leftrightarrow\ \Big[\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \Phi_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n}\ \big\{ |\mathrm{F}_n| > \varepsilon \big\} \overset{1}{\to} 0\ \Big]$$

$$\Leftrightarrow\ \Big[\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \Phi_n = \Big\{ \operatorname*{Sup}_{p \geq n} |\mathrm{F}_n| > \varepsilon \Big\} \overset{1}{\to} 0\ \Big]$$

$$\Leftrightarrow\ \Phi_n = \operatorname*{Sup}_{p \geq n}\ \left|\mathrm{F}_p\right| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0.$$

B.20. <u>Théorème</u> :

Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ converge p.p. vers $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ ssi $\boxed{\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{F}_n = \overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{F}_n}$,

c-à-d ssi $\boxed{\mathrm{F} = \operatorname*{Sup}_{n}\ \operatorname*{Inf}_{p}\ \mathrm{F}_{n+p} = \operatorname*{Inf}_{n}\ \operatorname*{Sup}_{p}\ \mathrm{F}_{n+p}}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on a

$$\left| \Big(\operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{n+p} \Big) - \mathrm{F} \right| = \left| \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{F}_{n+p} - \mathrm{F} \big) \right| \leq \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}}\ \left| \mathrm{F}_{n+p} - \mathrm{F} \right| = \operatorname*{Sup}_{r \geq n}\ \left| \mathrm{F}_r - \mathrm{F} \right| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0\ ;$$

donc $\mathrm{F} = \overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{F}_n$; on a de même

$$\left| \Big(\operatorname*{Inf}_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{n+p} \Big) - \mathrm{F} \right| = \left| \operatorname*{Inf}_{p \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{F}_{n+p} - \mathrm{F} \big) \right| \leq \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}}\ \left| \mathrm{F}_{n+p} - \mathrm{F} \right| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0\ ; \text{ donc } \mathrm{F} = \underline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{F}_n$$

.

b) $\Leftarrow$: Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $\forall\, r \geq n \quad \Big(\operatorname*{Inf}_{p \geq n} \mathrm{F}_p \Big) - \mathrm{F} \leq \mathrm{F}_r - \mathrm{F} \leq \Big(\operatorname*{Sup}_{p \geq n} \mathrm{F}_p \Big) - \mathrm{F}$,

donc $\forall\, r \geq n \quad |\mathrm{F}_r - \mathrm{F}| \leq \left| \Big(\operatorname*{Inf}_{p \geq n} \mathrm{F}_p \Big) - \mathrm{F} \right| \vee \left| \Big(\operatorname*{Sup}_{p \geq n} \mathrm{F}_p \Big) - \mathrm{F} \right|$;

$$\text{donc} \quad \operatorname*{Sup}_{r \geq n}\ |\mathrm{F}_r - \mathrm{F}| \leq \left| \Big(\operatorname*{Inf}_{p \geq n} \mathrm{F}_p \Big) - \tilde{f} \right| \vee \left| \Big(\operatorname*{Sup}_{p \geq n} \mathrm{F}_p \Big) - \mathrm{F} \right|$$

$$= \left| \Big(\operatorname*{Inf}_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{n+p} \Big) - \mathrm{F} \right| \vee \left| \Big(\operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{n+p} \Big) - \mathrm{F} \right| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0.$$

Notation : On note $\boxed{\operatorname*{Lim}_n \mathrm{F}_n}$ la limite d'une suite F_n convergente p.p. Nous utilisons la même notation que pour la convergence fine dans $\mathcal{PM}$ car il est manifeste que la convergence p.p. dans $\mathcal{FO}$ généralise la convergence fine dans $\mathcal{L}^1$.

B.21. Théorème : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{pp}}{\to} \mathrm{F}$ ssi $\boxed{\mathbb{1} \wedge \left|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\right| \overset{\times}{\to} 0}$.

B.22.* Théorème :

Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est C pp ssi la suite $\boxed{\Psi_n = \operatorname*{Sup}_{p>n} \left|\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_n\right| \overset{\mathrm{ms}}{\to} 0}$.

B.23.* Théorème : Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ et soit une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ telle que $\mathrm{F}_n \overset{\mathrm{ms}}{\to} \mathrm{F}$;

alors on a $\boxed{\underline{\operatorname*{Lim}}_n \mathrm{F}_n \leq \mathrm{F} \leq \overline{\operatorname*{Lim}}_n \mathrm{F}_n}$.

B.24.* Théorème : De toute suite C ms on peut extraire une sous-suite C pp.

B.25.* Théorème : Pour une suite monotone dans $\mathcal{FO}$ les quatre concepts C ms, C pp, D ms, D pp sont équivalents.

C. Convergence plate

C.1. Définition : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$; alors $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F}$ ssi

$$\boxed{\left\{\mathrm{F}_n \neq \mathrm{F}\right\} = \mathrm{S}\,(\mathrm{F}_n - \mathrm{F}) \overset{1}{\to} 0}.$$

Notation : On note $\boxed{{}^{\mathsf{A}}\lim_n \mathrm{F}_n}$ la limite d'une suite F_n convergeant platement.

C.2. Corollaire : La topologie de $\mathcal{FO}$ pour la convergence plate peut être définie par la pseudo-norme $\boxed{\|\mathrm{F}\|_{\mathsf{A}} = \|\mathrm{S}\,(\mathrm{F})\|_1} \geq \|\mathrm{F}\|_{\mathrm{ms}}$.

C.3. Théorème : Soient $\widehat{\mathrm{F}}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{A}}{\to} \mathrm{F}$; alors on a $\boxed{\mathrm{S}\,(\mathrm{F}_n) \overset{1}{\to} \mathrm{S}\,(\mathrm{F})}$.

C.4. Définition : Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est Cauchy-plate (C-plate) ssi la suite

$$\boxed{\alpha_n = \sup_{p>n} \left\|\left\{\mathrm{F}_p \neq \mathrm{F}_n\right\}\right\|_1 = \sup_{p>n} \left\|\mathrm{S}\,(\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_n)\right\|_1 \to 0}.$$

C.5. Théorème : $\mathcal{FO}$ est complet pour la convergence plate.

C.6. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence plate.

C.7. <u>Théorème</u> : $(\mathcal{FO}, |\ |, \|\ \|_{\mathsf{A}})$ est un espace pseudo-normé <u>complet</u> de Riesz.

D. <u>Convergence exacte</u>

D.1. <u>Définition</u> : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$; alors, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \mathrm{F}$ ssi

$$\boxed{\{\mathrm{F}_n \neq \mathrm{F}\} = \mathrm{S}(\mathrm{F}_n - \mathrm{F}) \overset{\times}{\to} 0}.$$

Notation : On note $\boxed{{}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{n} \mathrm{F}_n}$ la limite d'une suite F_n convergeant exactement.

D.2. <u>Théorème</u> : $\forall\ \mathrm{F} = (\tilde{f}_n) \in \mathcal{SX}$ on a $\boxed{\tilde{f}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \mathrm{F}}$.

<u>Dém</u> : Il faut montrer $\{\tilde{f}_n \neq \mathrm{F}\} \overset{\times}{\to} 0$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\{\tilde{f}_n \neq \mathrm{F}\} = \{\tilde{f}_n > \mathrm{F}\} \vee \{\tilde{f}_n < \mathrm{F}\}$; montrons par exemple $\{\tilde{f}_n > \mathrm{F}\} \overset{\times}{\to} 0$;
soit $\sigma_n \in \mathcal{K}$ une présentation de la suite $\tilde{f}_n$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\{\tilde{f}_n > \mathrm{F}\} = \big|\{\tilde{f}_n > \mathrm{F}\} - \{\tilde{f}_n > \tilde{f}_n\}\big| \leq 1 - \sigma_n$; donc $\{\tilde{f}_n > \mathrm{F}\} \overset{\times}{\to} 0$.

D.3. <u>Définition</u> : Une suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est <u>Cauchy-exacte</u> (C-exacte) ssi la suite

$$\boxed{\alpha_n = \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \{\mathrm{F}_p \neq \mathrm{F}_n\} \Big\|_1 = \Big\| \operatorname*{Sup}_{p>n} \mathrm{S}(\mathrm{F}_p - \mathrm{F}_n) \Big\|_1 \to 0}.$$

D.4. <u>Théorème</u> : La suite $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$ est C-exacte ssi $\boxed{\mathrm{S}(\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n) \overset{\times}{\to} 0}$,

c-à-d ssi $\boxed{\Big\| \operatorname*{Sup}_{p \geq n} \mathrm{S}(\mathrm{F}_{p+1} - \mathrm{F}_p) \Big\|_1 \to 0}$.

D.5. <u>Théorème</u> : Soient $\mathrm{F}_n, \mathrm{F} \in \mathcal{FO}$, $\mathrm{F}_n \overset{\mathsf{E}}{\to} \widehat{\mathrm{F}}$; alors on a $\boxed{\mathrm{S}(\mathrm{F}_n) \overset{\times}{\to} \mathrm{S}(\mathrm{F})}$.

D.6. <u>Théorème</u> : $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{FO}$ pour la convergence exacte.

D.7. <u>Théorème</u> : $\mathcal{FO}$ est complet pour la convergence exacte.

D.8. <u>Théorème</u> : De toute suite C-plate on peut extraire une sous-suite C-exacte.

D.9. <u>Théorème de balayage dans $\mathcal{FO}$</u> :

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$; alors on a $\boxed{{}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \alpha \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}}$ et $\boxed{{}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (-\alpha) \vee \mathrm{F} \wedge \alpha = \mathrm{F}}$.

D.10. Théorème : Soit $\mathrm{F}_n \in \mathcal{FO}$; supposons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\| \mathrm{S}(\mathrm{F}_n) \right\|_1 < +\infty$;

alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}_n$ converge exactement dans $\mathcal{FO}$ et $\mathrm{F}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} 0$.

§ 5. Equations linéaires dans $\mathcal{FO}$

On résoud l'*équation* $\boxed{\mathrm{F\,X = H}}$ d'inconnue X , avec F , X , H $\in \mathcal{FO}$.

5.1. Théorème :

Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ et $c > 0$ tels que $|\mathrm{F}| \geq c$; alors il existe un unique $\tilde{g} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathrm{F}\,\tilde{g} = 1$; on note $\boxed{\tilde{g} = \dfrac{1}{\mathrm{F}}}$. On a de plus $\left|\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right| = \dfrac{1}{|\mathrm{F}|} \leq \dfrac{1}{c}$ et $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right) = 1$.

Dém : L'unicité se démontre comme dans $\mathcal{L}^1$ (voir Théorème VI 7.31).

Montrons l'existence ; soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{B}$ telle que $\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathsf{E}} \mathrm{F}$ et telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|\tilde{f}_n| \geq c$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{\tilde{f}_n} \in \mathcal{B}$ et $\left|\dfrac{1}{\tilde{f}_n}\right| \leq \dfrac{1}{c}$;

de plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\tilde{f}_{n+1}} - \dfrac{1}{\tilde{f}_n}\right) = \mathrm{S}\left(\dfrac{\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n}{\tilde{f}_{n+1}\,\tilde{f}_n}\right) = \mathrm{S}\,(f_{n+1} - f_n)$.

On en déduit que $\dfrac{1}{\tilde{f}_n}$ est une suite exacte dans $\mathcal{FO}$; or cette suite est bornée par 1 , donc elle converge exactement vers une fonctionnelle $\tilde{g} \in \mathcal{B}$ telle que $|\,\tilde{g}\,| \leq \dfrac{1}{c}$;

on peut donc écrire $\mathrm{F}\,\tilde{g} = {}^{\mathsf{E}}\lim\limits_{n} \tilde{f}_n \dfrac{1}{\tilde{f}_n} = 1$. Par ailleurs $|\mathrm{F}|\,|\,\tilde{g}\,| = |\mathrm{F}\,\tilde{g}| = 1$,

donc par unicité $\dfrac{1}{|\mathrm{F}|} = |\,\tilde{g}\,| = \left|\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right|$; enfin on a $1 = \mathrm{S}\,(\mathrm{F}\,\tilde{g}) = \mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{S}\,(\tilde{g}) = \mathrm{S}\,(\tilde{g})$.

5.2. Théorème : Soient F , H $\in \mathcal{FO}$ tels que $\mathrm{S}\,(\mathrm{H}) \leq \mathrm{S}\,(\mathrm{F}) \leq |\mathrm{F}|$; alors il existe un unique $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F\,G = H}$ et $\mathrm{S}\,(\mathrm{G}) \leq \mathrm{S}\,(\mathrm{F})$.

Dém :

Posons $\mathrm{F}^* = \mathrm{F} + 1 - \mathrm{S}\,(\mathrm{F})$; on a $|\mathrm{F}| \wedge \left[1 - \mathrm{S}\,(\mathrm{F})\right] = 0$, donc $|\mathrm{F}^*| = |\mathrm{F}| + 1 - \mathrm{S}\,(\mathrm{F}) \geq 1$,

donc $\dfrac{1}{\mathrm{F}^*} \in \mathcal{B}$ existe ; posons $\mathrm{G} = \dfrac{\mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{H}}{\mathrm{F}^*} \in \mathcal{FO}$; on a clairement $\mathrm{S}\,(\mathrm{G}) \leq \mathrm{S}\,(\mathrm{F})$;

de plus $\mathrm{F\,G} = \dfrac{\mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{F\,H}}{\mathrm{F}^*} = \dfrac{\mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\big(\mathrm{F} + [1 - \mathrm{S}\,(\mathrm{F})]\big)\,\mathrm{H}}{\mathrm{F}^*} = \dfrac{\mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{F}^*\,\mathrm{H}}{\mathrm{F}^*} = \mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{H} = \mathrm{H}$.

Démontrons l'unicité ; soient $\mathrm{G}_1 , \mathrm{G}_2 \in \mathcal{FO}$ tels que $\mathrm{F\,G}_1 = \mathrm{H}$ et $\mathrm{F\,G}_2 = \mathrm{H}$;

on en déduit $\mathrm{F}\,(\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2) = 0$; donc $\mathrm{S}\,(\mathrm{F})\,\mathrm{S}\,(\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2) = \mathrm{S}\,(\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2) = 0$,

donc $\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2 = 0$.

5.3. <u>Corollaire</u> : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}$ tels que $\mathrm{S}(\mathrm{H}) \leq \mathrm{S}(\mathrm{F})$; supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{S}(\mathrm{F}) \leq n\,|\mathrm{F}|$; alors il existe un unique $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F\,G} = \mathrm{H}$ et $\mathrm{S}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{S}(\mathrm{F})$.

<u>Dém</u> : On applique le théorème précédent à $n\,\mathrm{F}$ et $n\,\mathrm{H}$.

5.4. <u>Thèorème fondamental</u> : Soient $\mathrm{F}, \mathrm{H} \in \mathcal{FO}$ tels que $\mathrm{S}(\mathrm{H}) \leq \mathrm{S}(\mathrm{F})$; alors il existe un unique $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F\,G} = \mathrm{H}$ et $\mathrm{S}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{S}(\mathrm{F})$.

<u>Dém</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $\left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{F\,X} = \left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{H}$ satisfait les conditions du corollaire précédent ; soit $\mathrm{G}_n \in \mathcal{FO}$ la solution unique de cette équation vérifiant la condition $\mathrm{S}(\mathrm{G}_n) \leq \left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\}$; on a alors aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{F\,G}_n = \left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{H}$.
On en déduit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $(\mathrm{G}_{n+1} - \mathrm{G}_n)\,\mathrm{F} = \left[\left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n+1}\right\} - \left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\}\right] \mathrm{H}$;
donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{S}(\mathrm{G}_{n+1} - \mathrm{G}_n)\,\mathrm{S}(\mathrm{F}) = \left[\left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n+1}\right\} - \left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\}\right] \mathrm{S}(\mathrm{H})$
$\leq \left[1 - \left\{|\mathrm{F}| \geq \dfrac{1}{n}\right\}\right] \mathrm{S}(\mathrm{H}) = \left\{|\mathrm{F}| \leq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{S}(\mathrm{H}) \leq \left\{|\mathrm{F}| \leq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{S}(\mathrm{F})$;
or $\mathrm{S}(\mathrm{G}_{n+1} - \mathrm{G}_n) \leq \mathrm{S}(\mathrm{F})$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{S}(\mathrm{G}_{n+1} - \mathrm{G}_n) \leq \left\{|\mathrm{F}| \leq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{S}(\mathrm{F})$;
de plus $\left\{|\mathrm{F}| \leq \dfrac{1}{n}\right\} \xrightarrow{1} 1 - \mathrm{S}(\mathrm{F})$, donc la suite $\left\{|\mathrm{F}| \leq \dfrac{1}{n}\right\} \mathrm{S}(\mathrm{F}) \xrightarrow{1} 0$; par ailleurs cette suite est aussi décroissante ; elle est donc déclinante et la suite G_n est exacte.
Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}$ la limite de la suite G_n ; on a $\mathrm{S}(\mathrm{G}_n) \xrightarrow{\times} \mathrm{S}(\mathrm{G})$, donc $\mathrm{S}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{S}(\mathrm{F})$;
en faisant $n \to +\infty$ dans l'équation de départ on obtient $\mathrm{S}(\mathrm{F})\,\mathrm{F\,G} = \mathrm{S}(\mathrm{F})\,\mathrm{H}$,
c-à-d $\mathrm{F\,G} = \mathrm{H}$. L'unicité se démontre comme au Théorème 5.2.

5.5.* <u>Corollaire</u> : <u>Inverse d'une fonctionnelle</u>

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{FO}$ tel que $\boxed{\mathrm{S}(\mathrm{F}) = 1}$; alors il existe un unique $\mathrm{G} \in \mathcal{FO}$ tel que $\mathrm{F\,G} = 1$;
on note $\boxed{\mathrm{G} = \dfrac{1}{\mathrm{F}}}$. On a de plus $\left|\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right| = \dfrac{1}{|\mathrm{F}|}$ et $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}}\right) = 1$.