CHAPITRE V

ALGEBRES DE RIESZ

Une *algèbre de Riesz* est un espace de Riesz muni d'une multiplication vérifiant des propriétés analogues à la multiplication dans $\mathbb{R}$. De nombreux espaces de fonctions constituent des algèbres de Riesz ; il en est de même de certains espaces de fonctionnelles, comme nous le verrons plus loin.

§ 1. Algèbres de Riesz

1.1. Définition : Une algèbre est dite standard ssi elle est associative, commutative et unitaire.

1.2. Définition : Un espace de Riesz V muni d'une structure d'algèbre standard est une algèbre de Riesz ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \quad u\,v \in \mathrm{V}^+ \\ 2)\ \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \ \big(u\,v = 0 \ \Leftrightarrow\ u \wedge v = 0\big) \end{array}}$$

Exemples : $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ sont des algèbres de Riesz.

1.3. Théorème : Dans une algèbre de Riesz V on a

1) $\forall\, u \in \mathrm{V}^+ \ \ \forall\, v\,,\, w \in \mathrm{V} \quad \big(v \leq w \ \Rightarrow\ u\,v \leq u\,w\big)$

2) $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad |u\,v| = |u|\,|v|$

3) $\forall\, u \in \mathrm{V} \quad u^2 = (v^+)^2 + (v^-)^2 = |u|^2 \in \mathrm{V}^+$

4) $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad u\,v = (u \wedge v)\,(u \vee v)$

5) $\forall\, u \in \mathrm{V}^+ \ \ \forall\, v\,,\, w \in \mathrm{V} \quad u\,(v \wedge w) = (u\,v) \wedge (u\,w) \quad \text{et} \quad u\,(v \vee w) = (u\,v) \vee (u\,w)$

6) $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad (u \wedge v)^n = u^n \wedge v^n \quad \text{et} \quad (u \vee v)^n = u^n \vee v^n$

7) $\forall\, u \in \mathrm{V}^+ \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{1} \wedge u^n \leq u \leq \mathbb{1} \vee u^n$

8) $\forall\, u \in \mathrm{V} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \big(\, u^n = 0 \ \Leftrightarrow\ u = 0\,\big)$

9) $\forall\, u\,,\, v\,,\, w \in \mathrm{V}^+ \quad \big[\big(u \leq w \ \ \underline{\text{et}}\ \ v \leq w \ \ \underline{\text{et}}\ \ u\,w \leq v\,w\big) \ \Rightarrow\ u \leq v\,\big]$

10) $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \big(\, u^n \leq v^n \ \Leftrightarrow\ u \leq v\,\big)$

Dém :

1) $v-u \geq 0$, donc $(v-u)\,x \geq 0$; de même $y-x \geq 0$, donc $v\,(y-x) \geq 0$, donc $u\,x \leq v\,x \leq v\,y$.

2) $u\,v = (u^+ - u^-)(v^+ - v^-) = \overbrace{(u^+v^+ + u^-v^-)}^{x} - \overbrace{(u^+v^- + u^-v^+)}^{y}$;
on a $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x\,y = 0$, donc aussi $x \wedge y = 0$, donc $|u\,v| = |x-y|$
$= x+y = (u^+v^+ + u^-v^-) + (u^+v^- + u^-v^+) = (u^+ + u^-)(v^+ + v^-) = |u|\,|v|$.

3) $u^2 = (u^+ - u^-)^2 = (u^+)^2 + (u^-)^2 + 2\,u^+u^- = (u^+)^2 + (u^-)^2 \geq 0$;
de même $|u|^2 = (u^+ + u^-)^2 = (u^+)^2 + (u^-)^2 + 2\,u^+u^- = (u^+)^2 + (u^-)^2$.

4) $(u \wedge v)(u \vee v) = \frac{1}{2}\big(u+v-|u-v|\big)\ \frac{1}{2}\big(u+v+|u-v|\big) = \frac{1}{4}\big[(u+v)^2 - |u-v|^2\big]$
$= \frac{1}{4}\big[(u+v)^2 - (u-v)^2\big] = u\,v$.

5) $u\,(v \wedge w) = \frac{1}{2}\,u\,\big(v+w-|v-w|\big) = \frac{1}{2}\big(u\,v + u\,w - u\,|v-w|\big)$
$= \frac{1}{2}\big(u\,v + u\,w - |u|\,|v-w|\big) = \frac{1}{2}\big(u\,v + u\,w - |u\,v - u\,w|\big) = (u\,v) \wedge (u\,w)$.

6) $n=2$: $u^2 \wedge v^2 \leq (u\,v) \vee (u^2 \wedge v^2) = (u\,v \vee u^2) \wedge (u\,v \vee v^2)$
$= \big[u\,(u \vee v)\big] \wedge \big[v\,(u \vee v)\big] = (u \wedge v)\,(u \vee v) = u\,v$; donc $u^2 \wedge v^2 = (u\,v) \wedge (u^2 \wedge v^2)$
$= (u\,v \wedge u^2) \wedge (u\,v \wedge v^2) = \big[u\,(u \wedge v)\big] \wedge \big[v\,(u \wedge v)\big] = (u \wedge v)^2$.

$n \geq 3$: *par récurrence sur* n :
$u^n \wedge v^n \leq \big[(u \vee v)\,u^{n-1}\big] \wedge \big[(u \vee v)\,v^{n-1}\big] = (u \vee v)\,\big[u^{n-1} \wedge v^{n-1}\big] = (u \vee v)\,(u \wedge v)^{n-1}$
$= u\,v\,(u \wedge v)^{n-2}$; donc $u^n \wedge v^n = \big[u\,v\,(u \wedge v)^{n-2}\big] \wedge u^n \wedge v^n$
$= \big[u\,v\,(u \wedge v)^{n-2} \wedge u^n\big] \wedge \big[u\,v\,(u \wedge v)^{n-2} \wedge v^n\big] \leq \big[(u\,v^{n-1}) \wedge u^n\big] \wedge \big[(u^{n-1})\,v \wedge v^n\big]$
$= \big[u\,(u^{n-1} \wedge v^{n-1})\big] \wedge \big[v\,(u^{n-1} \wedge v^{n-1})\big] = (u \wedge v)\,(u^{n-1} \wedge v^{n-1}) = (u \wedge v)\,(u \wedge v)^{n-1}$
$= (u \wedge v)^n$; par ailleurs $(u \wedge v)^n \leq u^n$ et $(u \wedge v)^n \leq v^n$, donc $(u \wedge v)^n \leq u^n \wedge v^n$.

7) On a $(\mathbb{1} \wedge u)^{n-1} \leq \mathbb{1} \leq (\mathbb{1} \vee u)^{n-1}$, donc $\mathbb{1} \wedge u^n = (\mathbb{1} \wedge u)^n \leq \mathbb{1} \wedge u \leq u$
$\leq \mathbb{1} \vee u \leq (\mathbb{1} \vee u)^n = \mathbb{1} \vee u^n$.

8) On a $\big(u^2 = 0 \Rightarrow u \wedge u = 0\big)$, c-à-d $\big(u^2 = 0 \Rightarrow u = 0\big)$; de plus soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $u^n = 0$; alors $u^{2^n} = 0$, donc $u^{2^{n-1}} = 0$, donc par récurrence $u = 0$.

9) On a $-w \leq v-u \leq w$, donc $|v-u| \leq w$; par ailleurs on a $0 \leq v\,w - u\,w$
$= (v-u)\,w = (v-u)^+\,w - (v-u)^-\,w$, donc $(v-u)^-\,w \leq (v-u)^+\,w$; donc
$(v-u)^-\,w = \big[(v-u)^+\,w\big] \wedge (v-u)^-\,w = \big[(v-u)^+ \wedge (v-u)^-\big]\,w = 0$; d'où
$[(v-u)^-]^2 \leq (v-u)^-\,|v-u| \leq (v-u)^-\,w = 0$, donc $(v-u)^- = 0$, c-à-d $v-u \geq 0$.

10) Supposons $u^n \leq v^n$; alors on a $u\,(u \vee v)^{n-1} = u\,(u^{n-1} \vee v^{n-1}) = u^n \vee (u\,v^{n-1})$ $\leq v^n \vee (u\,v^{n-1}) = v^{n-1}\,(u \vee v)$; en multipliant cette égalité par l'inégalité évidente $u^{n-2} \leq (u \vee v)^{n-2}$ on obtient $u^{n-1}\,(u \vee v)^{n-1} \leq v^{n-1}\,(u \vee v)^{n-1}$, donc par la propriété précédente $u^{n-1} \leq v^{n-1}$, donc par récurrence $u = v$.

1.4. <u>Théorème</u> : Un espace de Riesz V muni d'une structure d'algèbre standard est une algèbre de Riesz ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1')\ \ \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad |u\,v| = |u|\,|v| \\ 2')\ \ \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \big(u^2 = 0 \ \Rightarrow\ u = 0\big) \end{array}}$$

<u>Dém</u> : Il suffit de démontrer $\big\{1', 2'\big\} \Rightarrow \big\{1\,, 2\big\}$.

1) Si $u\,,\, v \geq 0$ on a $u\,v = |u|\,|v| = |u\,v| \geq 0$.

2) Soit $u \in \mathrm{V}$; on a $(u^+)^2 + (u^-)^2 + 2\,u^+ u^- = (u^+ + u^-)^2 = |u|^2 = \big|u\,|u|\big|$ $= \big|(u^+)^2 - (u^-)^2\big| \leq (u^+)^2 + (u^-)^2$, donc $u^+ u^- = 0$; donc aussi $u^2 = (u^+ - u^-)^2 = (u^+)^2 + (u^-)^2 = |u|^2$.
On en déduit comme au théorème précédent $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad u\,v = (u \wedge v)(u \vee v)$; donc $u \wedge v = 0 \ \Rightarrow\ u\,v = 0$. Par ailleurs $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}^+ \quad (u \wedge v)^2 = (u \wedge v)(u \wedge v) \leq u\,v$; donc $u\,v = 0 \ \Rightarrow\ u \wedge v = 0$.

1.5. <u>Théorème</u> : Si V est archimédien la condition 2') est redondante.

<u>Dém</u> : Soit $u \in \mathrm{V}$ tel que $u^2 = 0$. L'examen des démonstrations précédentes nous montre que la condition 1') permet d'obtenir les propriétés 1) à 7) du Théorème 1. 3. En particulier la propriété 7) donne $\forall\, \lambda > 0 \quad \lambda\,|u| \leq \mathbb{1} \vee \big(\lambda^2\,u^2\big) = \mathbb{1} \vee 0 = \mathbb{1}$, donc $\forall\, \lambda > 0 \quad \lambda\,|u| \leq \mathbb{1}$, donc $|u| = 0$, c-à-d $u = 0$.

1.6. <u>Définition</u> : Un espace de Riesz-Banach V muni d'une structure d'algèbre de Riesz est une <u>algèbre de Riesz-Banach</u> ssi $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ $\boxed{\|u\,v\| \leq \|u\|\,\|v\|}$.

1.7.* <u>Théorème</u> :

$\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{PR}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ sont des algèbres de Riesz-Banach pour la norme uniforme.

1.8. <u>Définition</u> : Soient V et V' deux algèbres de Riesz ; le morphisme de Riesz $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est un <u>algébromorphisme de Riesz</u> ssi $\forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V}$ $\boxed{\phi\,(u\,v) = \phi\,(u)\;\phi\,(v)}$.

§ 2. Modules de Riesz

2.1. Définition : Soit V un domaine de Riesz sur une algèbre de Riesz A ; on dit que V est un module de Riesz sur A ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \mathbb{1}\, u = u \\ 2)\ \ \forall\, a\,,\, b \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad a\,(b\,u) = (a\,b)\,u \\ 3)\ \ \forall\, a \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \big(a^2\,u = 0 \ \Rightarrow\ a\,u = 0\big) \end{array}}$$

2.2. Théorème : Si V est archimédien la condition 3) est redondante.

Dém : Soient $a \in \mathrm{A}$ et $u \in \mathrm{V}$ tels que $a^2 u = 0$; on a $\forall\, \lambda > 0 \quad \lambda\,|a| \leq \mathbb{1} \vee \big(\lambda^2\, a^2\big)$, donc $\lambda\,|a\,u| \leq |u| \vee \big(\lambda^2\, a^2\, |u|\big) = |u| \vee 0 = |u|$; donc $a\,u = 0$.

2.3.* Théorème : Si V est un module de Riesz sur A on a

$$\boxed{\forall\, a \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \ \big(a^n\, u = 0 \ \Leftrightarrow\ a\,u = 0\big)}\,.$$

2.4.* Théorème : 1) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{PM}$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{R}$.
2) $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_D$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}$.

§ 3. Algébromodules de Riesz

3.5. Définition : Soient A , V deux algèbres de Riesz ; on dit que V est un algébromodule de Riesz sur A ssi V est un domaine de Riesz sur A et ssi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \forall\, u \in \mathrm{V} \quad 1_{\mathrm{A}}\, u = u \\ 2)\ \ \forall\, a\,,\, b \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad a\,(b\,u) = (a\,b)\,u \\ 3)\ \ \forall\, a \in \mathrm{A} \quad \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad (a\,u)\,v = a\,(u\,v) \end{array}}$$

3.6. Théorème : Si V est un algébromodule de Riesz sur A on a

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \forall\, a\,,\, b \in \mathrm{A} \quad \forall\, u\,,\, v \in \mathrm{V} \quad (a\,u)\,(b\,v) = (a\,b)\,(u\,v) \\ 2)\ \ \forall\, a \in \mathrm{A} \quad \forall\, u \in \mathrm{V} \quad \forall\, m\,,\, n \in \mathbb{N}^* \ \ \big(a^m\, u^n = 0 \ \Leftrightarrow\ a\,u = 0\big) \end{array}}$$

En particulier un algébromodule de Riesz est bien un module de Riesz.

$\underline{\text{Dém}}$: 1) $(a\,u)\,(b\,v) = a\,[u\,(b\,v)] = a\,[(b\,v)\,u] = a\,[b\,(v\,u)] = (a\,b)\,(v\,u) = (a\,b)\,(u\,v)$

2) Si $a^m\,u^n = 0$ on a aussi $0 = a^{m+n}\,u^{m+n} = (a\,u)^{m+n}$, donc $a\,u = 0$.

Bien entendu une algèbre de Riesz est un algébromodule de Riesz sur toute sous-algèbre cohérente. Plus généralement, soient A et B deux algèbres de Riesz et ϕ un algébromorphisme de Riesz de A dans B ; on définit $\forall\, a \in \mathrm{A}\ \ \forall\, b \in \mathrm{B}\quad a\,.\,b = \phi(a)\,b$; muni de cette multiplication externe, B est un algébromodule de Riesz sur A.
Réciproquement si B est un algébromodule de Riesz sur A, alors l'application $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$: $a \mapsto a\,1_{\mathrm{B}}$ est un algébromorphisme de Riesz.

CHAPITRE VI

FONCTIONNELLES HILBERTIENNES, BORNEES ET CARACTERISTIQUES SUR [a,b]

§ 1. Fonctionnelles hilbertiennes sur [a,b]

L'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctionnelles *hilbertiennes* est le N-dual de l'espace semi-normé $\big(\mathcal{E}, \|\ \|_2\big)$; rappelons que $\mathcal{L}^1$ n'est qu'un *sous-espace* du N-dual de $\big(\mathcal{E}, \|\ \|\big)$. Nous montrerons, ce qui n'a *a priori* rien d'évident, que $\boxed{\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1}$; de plus $\mathcal{L}^2$ est un espace de Hilbert.

1.1. Définition : **Une fonctionnelle hilbertienne sur [a,b] est un élément du N-dual de l'espace semi-normé** $\big(\mathcal{E}, \|\ \|_2\big)$.

Ou encore : **Une fonctionnelle hilbertienne sur [a,b] est une forme linéaire** $\tilde{f}$ **sur** $\mathcal{E}$ **vérifiant la propriété :** $\boxed{\textbf{il existe } \mathbf{M > 0} \textbf{ tel que } \forall\, \mathbf{g} \in \mathcal{E}\ \ \big|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{g})\big| \leq \mathbf{M}\,\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{2}}}$

Etant donné que $\forall\, g \in \mathcal{E}\quad \|g\|_2 \leq \sqrt{b-a}\ \|g\|$, on a nécessairement $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$.

On note $\mathcal{L}^2$ l'espace vectoriel des fonctionnelles hilbertiennes sur $[a,b]$.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{L}^2 \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E}, \|\ \|_2\big)}$ et $\boxed{\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{PM}}$.

1.2.* Théorème : $\mathcal{L}^2$ constitue un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{II}}$, duale de la semi-norme $\|\ \|_2$, définie par $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{II}} = \sup\limits_{g \in \mathcal{E},\ \|g\|_2 = 1} \big|\tilde{f}(g)\big|}$.

1.3.* Théorème : $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^2$ et $\forall\, g \in \mathcal{R}$ on a $\|g\|_{\mathrm{II}} = \|g\|_2$.

On peut donc noter $\boxed{\forall\, \tilde{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{\mathcal{L}^2}\quad \|\tilde{\boldsymbol{f}}\|_{\mathbf{2}} = \|\tilde{\boldsymbol{f}}\|_{\mathbf{II}}}$.

1.4.* Lemme : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2\quad \|\tilde{f}\|_\star \leq \sqrt{b-a}\ \|\tilde{f}\|_2$.

1.5. Définition : On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{2} \tilde{f}$ ssi $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_2 \to 0$ et on note $\boxed{\tilde{f} = {}^2\lim\limits_{n} \tilde{f}_n}$; on dit que la suite $\tilde{f}_n$ converge en norme $\|\ \|_2$ vers $\tilde{f}$.

Le théorème suivant est remarquable car il contraste complètement avec le cas de $\mathcal{PM}$ et souligne la spécificité de la norme hilbertienne par rapport à la norme uniforme sur $\mathcal{E}$.

1.6. Théorème fondamental : $\boxed{\mathcal{E} \text{ est dense dans } \mathcal{L}^2}$.

Dém : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$, $\|\tilde{f}\|_2 = 1$, et soit $\mathrm{A} = \{ g \in \mathcal{E} \,\|\, \tilde{f}(g) = 1 \}$; on a $\mathrm{A} \neq \emptyset$.

Posons $\alpha = \inf\limits_{g \in \mathcal{A}} \|g\|_2$; on a $\forall\, g \in \mathrm{A} \quad 1 = \tilde{f}(g) \leq \|g\|_2$, donc $\|g\|_2 \geq 1$;

on a donc aussi $\alpha \geq 1$. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon \leq \alpha$ et choisissons $g \in \mathrm{A}$

tel que $\|g\|_2 \leq \alpha + \varepsilon$; on a donc $1 \leq \alpha \leq \|g\|_2 \leq \alpha + \varepsilon$.

Soit $\mathrm{V} = \{ h \in \mathcal{E} \,\|\, \tilde{f}(h) = 0 \}$; alors $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \forall\, h \in \mathrm{V}$ on a $g + t\, h \in \mathrm{A}$, donc

$$\alpha^2 \leq \|g + t\, h\|_2^2 = \|g\|_2^2 + 2\, t\, g(h) + t^2 \|h\|_2^2$$

$$\alpha^2 \leq \alpha^2 + 2\, \alpha\, \varepsilon + \varepsilon^2 + 2\, t\, g(h) + t^2 \|h\|_2^2$$

$$t^2 \|h\|_2^2 + 2\, t\, g(h) + \varepsilon\, (2\, \alpha + \varepsilon) \geq 0$$

$$t^2 \|h\|_2^2 + 2\, t\, g(h) + 3\, \alpha\, \varepsilon \geq 0 \;;$$

on en déduit $\Delta' = [g(h)]^2 - 3\, \alpha\, \varepsilon\, \|h\|_2^2 \leq 0$, c-à-d $|g(h)| \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\; \|h\|_2$.

Posons $\forall\, k \in \mathcal{E} \quad \Phi(k) = k - \tilde{f}(k)\, g$; on a $\tilde{f}(g) = 1$, donc $\forall\, k \in \mathcal{E} \quad \Phi(k) \in \mathrm{V}$;

on a donc $\forall\, k \in \mathcal{E} \quad \big| g(k) - \tilde{f}(k)\, \|g\|_2^2 \big| = \big| g\,[\Phi(k)] \big| \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\; \|\Phi(k)\|_2$

$\leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \Big(\|k\|_2 + \big|\tilde{f}(k)\big|\, \|g\|_2 \Big) \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \Big(\|k\|_2 + \|g\|_2\, \|k\|_2 \Big)$

$= \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \big(1 + \|g\|_2\big)\, \|k\|_2$; on en déduit $\big\| g - \|g\|_2^2\, \tilde{f} \,\big\|_2 \leq \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}\, \big(1 + \|g\|_2\big)$;

donc en posant $g_\star = \dfrac{g}{\|g\|_2^2} \in \mathcal{E}$, on obtient

$\|g_\star - \tilde{f}\,\|_2 \leq \dfrac{\sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}}{\|g\|_2} \Big(\dfrac{1}{\|g\|_2} + 1 \Big) \leq 2\, \sqrt{3\, \alpha\, \varepsilon}$.

Remarque : Cette démonstration permet plus généralement d'énoncer le théorème suivant :

Soit H un espace préhilbertien réel quelconque ; soit H l'espace vectoriel des formes linéaires sur H de la forme $\boxed{\{u\} : v \mapsto \langle u , v \rangle}$ avec $u \in$ H ; H peut être muni d'une structure d'espace préhilbertien réel en posant $\forall\, \{u\}, \{v\} \in$ H $\big\langle \{u\}, \{v\} \big\rangle = \langle u , v \rangle$; alors H est *dense* dans le N-dual de H, c-à-d dans l'espace complet de toutes les formes linéaires normées sur H.

1.7.* Corollaire : $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{L}^2$.

1.8.* Corollaire : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{L}^2$.

1.9. <u>Corollaire</u> : $\boxed{\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1}$ et $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2 \quad \big\|\, \tilde f \,\big\|_1 \leq \sqrt{b-a}\, \big\|\, \tilde f \,\big\|_2$.

<u>Dém</u> : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^2$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{2} \tilde f$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\big\|\, f_n - \tilde f \,\big\|_\star \leq \sqrt{b-a}\, \big\|\, f_n - \tilde f \,\big\|_2$; donc $f_n \xrightarrow{\star} \tilde f$, donc $\tilde f \in \mathcal{L}^1$; de plus on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\|\, f_n \,\|_1 \leq \sqrt{b-a}\, \|\, f_n \,\|_2$, donc quand $n \to +\infty$ on obtient $\big\|\, \tilde f \,\big\|_1 \leq \sqrt{b-a}\, \big\|\, \tilde f \,\big\|_2$.

1.10.* <u>Corollaire</u> : Soient $\tilde f_n \,,\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$; alors on a $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f \;\Rightarrow\; \tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f$.

1.11. <u>Théorème</u> : $\mathcal{L}^2$ est un sous-espace cohérent et $\boxed{\text{intégral}}$ de $\mathcal{PM}$.

<u>Dém</u> : La cohérence de $\mathcal{L}^2$ est une conséquence de la cohérence de $\mathcal{E}$ et de la densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2$. Démontrons l'intégralité de $\mathcal{L}^2$. Soit $\tilde g \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$ et soit $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$ tel que $\tilde f \leq \tilde g$; on a $\forall\, h \in \mathcal{E}$ $\big|\tilde f(h)\big| \leq \tilde f\big(|h|\big) \leq \tilde g\big(|h|\big) \leq \|g\|_2\, \|h\|_2$, donc $\tilde f \in \mathcal{L}^2$.

1.12. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f \in \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow \big|\tilde f\big| \in \mathcal{L}^2}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{2} f$; alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \in \mathcal{E}$ et $|f_n| \xrightarrow{2} \big|\tilde f\big|$, donc $\big|\tilde f\big| \in \mathcal{L}^2$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$ tel que $\big|\tilde f\big| \in \mathcal{L}^2$; on a $\tilde f^+ \leq \big|\tilde f\big|$ et $\tilde f^- \leq \big|\tilde f\big|$, donc $\tilde f^+ \in \mathcal{L}^2$ et $\tilde f^- \in \mathcal{L}^2$, donc $\tilde f = \tilde f^+ - \tilde f^- \in \mathcal{L}^2$

1.13. <u>Théorème</u> : $\mathcal{L}^1$ est un sous-espace cohérent et $\boxed{\text{intégral}}$ de $\mathcal{PM}$.

<u>Dém</u> : La cohérence de $\mathcal{L}^1$ est une conséquence de la cohérence de $\mathcal{E}$ et de la densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^1$. Démontrons l'intégralité de $\mathcal{L}^1$. Soit $\tilde g \in \big(\mathcal{L}^1\big)^+$ et soit $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$ tel que $\tilde f \leq \tilde g$. Soit $g_n \in \mathcal{E}^+$ tel que $g_n \xrightarrow{1} \tilde g$; alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\tilde f \wedge g_n \leq g_n \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$, donc $\tilde f \wedge g_n \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+ \subset \big(\mathcal{L}^1\big)^+$; or $\tilde f \wedge g_n \xrightarrow{\star} \tilde f \wedge g = \tilde f$, donc $\tilde f \in \big(\mathcal{L}^1\big)^+$.

1.14. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \big|\tilde f\big| \in \mathcal{L}^1}$.

<u>Dém</u> : Idem que pour $\mathcal{L}^2$.

1.15. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^2$; alors on a $\boxed{\tilde f^{\,2} \leq \tilde f \;\Leftrightarrow\; 0 \leq \tilde f \leq 1}$.

<u>Dém</u> :

On a $\tilde f \geq \tilde f^{\,2} \geq 0$; par ailleurs $(1 - \tilde f)^2 = 1 - 2\, \tilde f + \tilde f^2 \leq 1 - \tilde f$; donc $1 - \tilde f \geq 0$.

1.16.* Lemme : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{R} \quad \| f\, g \|_1 \leq \| f \|_2 \, \| g \|_2$.

1.17. Définition : Dans $\mathcal{L}^2$ on définit le produit de deux éléments par des limites de produits de fonctions de $\mathcal{E}$. Plus précisément soient $\tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2$ et soient des suites $\tilde{f}_n\, ,\, \tilde{g}_n \in \mathcal{E}$ telles que $\tilde{f}_n \overset{2}{\rightarrow} \tilde{f}$ et $\tilde{g}_n \overset{2}{\rightarrow} \tilde{g}$; alors on pose $\boxed{\tilde{f}\, \tilde{g} \,=\, {}^1\lim_n \; \tilde{f}_n\, \tilde{g}_n} \in \mathcal{L}^1$.

On montre facilement, à l'aide du lemme précédent, que le produit $\tilde{f}\,\tilde{g}$ est bien défini.

1.18.* Théorème : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{L}^2$ on a 1) $\tilde{f}\,\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$

2) $\left|\tilde{f}\,\tilde{g}\right| = \left|\tilde{f}\right|\left|\tilde{g}\right|$

3) $\left\|\tilde{f}\,\tilde{g}\right\|_1 \leq \left\|\tilde{f}\right\|_2 \|\tilde{g}\|_2$.

1.19.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2$ on a $\left|\tilde{f}\right|^2 = \tilde{f}^{\,2}$.

1.20.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2$ on a $\left\|\tilde{f}\right\|_2 = \sqrt{\left\|\tilde{f}^{\,2}\right\|_1}$.

1.21. Théorème : On définit le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{L}^2$ en posant

$$\forall\, \tilde{f},\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2 \quad \boxed{\left\langle \tilde{f},\, \tilde{g} \right\rangle \,=\, \left(\tilde{f}\,\tilde{g}\right)(\mathbb{1}) = \int_a^b \tilde{f}\,\tilde{g}\; dx} \, .$$

1.22.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \quad \forall\, g \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{\left\langle \tilde{f},\, g \right\rangle = \tilde{f}\,(g)}$.

1.23.* Théorème : $\left(\mathcal{L}^2,\, |\;\;|,\, \langle\;\, ,\;\,\rangle\right)$ est un espace de Riesz-Hilbert.

1.24. Théorème de balayage dans $\mathcal{L}^2$:

$$\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{L}^2 \text{ on a } \boxed{{}^2\lim_{\alpha \to +\infty} \; \alpha \wedge \tilde{f} = \tilde{f}} \quad \text{et} \quad \boxed{{}^2\lim_{\alpha \to +\infty} \; (-\alpha) \vee \tilde{f} \wedge \alpha = \tilde{f}} \, .$$

Dém : Analogue au cas de $\mathcal{L}^1$.

§ 2. Racine carrée d'une fonctionnelle sommable positive sur [a,b]

2.1. Lemme : $\forall\, u\, ,\, v \in \mathbb{R}^+$ on a $\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \leq |u - v|$.

Dém : $|\sqrt{u} - \sqrt{v}\,| \leq \sqrt{u} + \sqrt{v}$

$|\sqrt{u} - \sqrt{v}\,|^2 \leq \left(\sqrt{u} + \sqrt{v}\right) |\sqrt{u} - \sqrt{v}\,|$

$\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \leq |u - v|$.

2.2. Corollaire : $\forall\, \tilde f,\, \tilde g \in \mathcal{E}^+$ on a $\|\sqrt{f} - \sqrt{g}\,\|_2^2 \leq \|\, f - g\,\|_1$.

Dém : On a $\forall\, t \in [a\,,b]$ $\left[\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}\,\right]^2 \leq |\, f(t) - g(t)|$,

donc $\|\sqrt{f} - \sqrt{g}\,\|_2^2 = \int_a^b \left[\sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)}\,\right]^2 dt \leq \int_a^b |\, f(t) - g(t)|\, dt = \|\, f - g\,\|_1$.

2.3.* Théorème : Soit $\boxed{\tilde f \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+}$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$;
alors la suite $\sqrt{f_n}$ converge dans $\left(\mathcal{L}^2\right)^+$ vers une limite indépendante de la suite particulière f_n. On note cette limite $\boxed{\sqrt{\tilde f}} \in \left(\mathcal{L}^2\right)^+$.

2.4.* Théorème :
$\forall\, \tilde f \in (\mathcal{L}^1)^+$ $\left(\sqrt{\tilde f}\right)^2 = \tilde f$; ce qui implique symboliquement $\boxed{\left(\mathcal{L}^2\right)^2 = \left(\mathcal{L}^1\right)^+}$.

2.5.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ $\sqrt{\tilde f^{\,2}} = |\,\tilde f\,|$.

2.6.* Théorème : $\forall\, \tilde f,\, \tilde g \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$ $\sqrt{\tilde f\, \tilde g} = \sqrt{\tilde f}\,\sqrt{\tilde g}$.

2.7. Lemme : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{L}^2$ on a $\left[\tilde f\, \tilde g = 0 \;\Rightarrow\; |\,\tilde f + \tilde g\,| = |\,\tilde f\,| + |\,\tilde g\,|\right]$.

Dém : $|\,\tilde f + \tilde g\,|^2 = \tilde f^2 + \tilde g^2 + 2\,\tilde f\,\tilde g = |\,\tilde f\,|^2 + |\,\tilde g\,|^2 + 2\,|\,\tilde f\,\tilde g\,| = \left(|\,\tilde f\,| + |\,\tilde g\,|\right)^2$;
on en déduit $|\,\tilde f + \tilde g\,| = |\,\tilde f\,| + |\,\tilde g\,|$.

2.8. Théorème : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{L}^2$ on a $\left[\tilde f\, \tilde g = 0 \;\Leftrightarrow\; |\,\tilde f\,| \wedge |\,\tilde g\,| = 0\right]$.

Dém : a) $\Rightarrow$: On a $|\,\tilde f + \tilde g\,| = |\,\tilde f\,| + |\,\tilde g\,|$, donc $|\,\tilde f\,| \wedge |\,\tilde g\,| = 0$.

b) $\Leftarrow$: On a $|\,\tilde f + \tilde g\,| = |\,\tilde f\,| + |\,\tilde g\,|$ et donc aussi $|\,\tilde f - \tilde g\,| = |\,\tilde f\,| + |\,\tilde g\,|$;
donc $(\tilde f + \tilde g)^2 = (\tilde f - \tilde g)^2$, donc $\tilde f\,\tilde g = 0$.

§ 3. Fonctionnelles bornées sur [a,b]

L'espace $\mathcal{B}$ des fonctionnelles *bornées* est le N-dual de l'espace semi-normé $\left(\mathcal{E},\, \|\;\|_1\right)$. C'est aussi l'espace des fonctionnelles $\tilde f$ de $\mathcal{L}^1$ pour lesquelles il existe $M > 0$ tel que $|\,\tilde f\,| \leq M$.

3.1. Définition :

Une fonctionnelle bornée sur [a,b] est un élément du N-dual de l'espace semi-normé $\left(\mathcal{E},\, \|\;\|_1\right)$.

Ou encore : **Une fonctionnelle bornée sur $[a,b]$ est une forme linéaire $\tilde{f}$ sur $\mathcal{E}$ vérifiant la propriété :** $\boxed{\textbf{il existe } \mathbf{M>0} \textbf{ tel que } \forall\, \mathbf{g} \in \mathcal{E} \ \ |\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{g})| \le \mathbf{M}\,\|\mathbf{g}\|_1}$.

Etant donné que $\forall\, g \in \mathcal{E} \ \ \|g\|_1 \le \sqrt{b-a}\, \|g\|_2$, on a nécessairement $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{L}^2}$.

On note $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des fonctionnelles bornées sur $[a,b]$.
(Nous préférons cette notation à la notation usuelle $\mathcal{L}^\infty$, car les propriétés de l'espace $\mathcal{B}$ nous paraissent trop différentes de celles des espaces $\mathcal{L}^1$ ou $\mathcal{L}^2$).

Autrement dit $\boxed{\mathcal{B} \text{ est le N-dual de l'espace semi-normé } \big(\mathcal{E},\, \|\ \|_1\big)}$ et $\boxed{\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2}$.

3.2.* Théorème : $\mathcal{B}$ constitue un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$, duale de la semi-norme $\|\ \|_1$, définie par $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} = \sup\limits_{g \in \mathcal{E},\, \|g\|_1 = 1} |\tilde{f}(g)|}$.

3.3.* Théorème : $\big(\mathcal{B},\, |\ |,\, \|\ \|_{\mathrm{B}}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

3.4.* Théorème : $\mathcal{R} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2$ et on a $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B} \ \ \|\tilde{f}\|_2 \le \sqrt{b-a}\, \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}$.

3.5. Théorème : $\boxed{\text{Soit } \tilde{f} \in \mathcal{PM} \text{ ; alors } \tilde{f} \in \mathcal{B} \text{ ss'il existe } M>0 \text{ tel que } |\tilde{f}| \le M.}$

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit $\tilde{f} \in \mathcal{B}$; alors il existe $M>0$ tel que $\forall\, g \in \mathcal{E} \ \ |\tilde{f}(g)| \le M\,\|g\|_1$;
on peut donc écrire $\forall\, g \in \mathcal{E}^+ \ \ |\tilde{f}|(g) = \sup\limits_{h \in \mathcal{E},\, |h| \le g} |\tilde{f}(h)| \le \sup\limits_{h \in \mathcal{E},\, |h| \le g} M\,\|h\|_1 \le M\,\|g\|_1$,
c-à-d très exactement $|\tilde{f}| \le M$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et soit $M>0$ tel que $|\tilde{f}| \le M$; alors on peut écrire
$\forall\, g \in \mathcal{E} \ \ |\tilde{f}(g)| \le |\tilde{f}|\big(|g|\big) \le M\,\|g\|_1$, c-à-d $\tilde{f} \in \mathcal{B}$.

3.6.* Corollaire : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{B}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}} = \inf\limits_{\substack{M \in \mathbb{R}^+ \\ M \ge |\tilde{f}|}} M}$.

3.7.* Théorème : 1) $\forall\, f \in \mathcal{R}$ $\boxed{\|\{f\}\|_{\mathrm{B}} \le \|f\|}$ 2) $\forall\, f \in \mathcal{C}$ $\boxed{\|\{f\}\|_{\mathrm{B}} = \|f\|}$.

3.8. Théorème : $\mathcal{R}$ est la fermeture de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$.

Dém : Nous aurons besoin d'un rappel relativement détaillé de la structure de $\mathcal{R}$:

On note $\mathcal{R}^\bullet$ l'espace vectoriel des fonctions réglées <u>normalisées</u>, c-à-d des fonctions réglées telles que $\forall\, c \in [\,a\,,b\,] \quad f(c) = \dfrac{1}{2}\Big(\lim\limits_{c^-} f + \lim\limits_{c^+} f\Big)$. $\mathcal{R}^\bullet$ n'est pas une algèbre.

On note $\mathcal{R}_\bullet$ l'algèbre des fonctions réglées <u>presque nulles</u>, c-à-d des fonctions réglées telles que $\forall\, c \in [\,a\,,b\,] \quad \lim\limits_{c^-} f = \lim\limits_{c^+} f = 0$, ou encore des fonctions réglées nulles sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points de [a,b].

$\mathcal{R}^\bullet$ et $\mathcal{R}_\bullet$ sont des sous-espaces <u>fermés</u> de $\mathcal{R}$ pour la topologie uniforme, et on a

$$\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{R}^\bullet \oplus \mathcal{R}_\bullet}\,.$$

Enfin on note $\mathcal{E}^\bullet = \mathcal{E} \cap \mathcal{R}^\bullet$ l'espace vectoriel des fonctions étagées normalisées ;
$\mathcal{E}^\bullet$ est dense dans $\mathcal{R}^\bullet$ pour la topologie uniforme.

Démontrons maintenant le théorème ; nous utilisons la propriété élémentaire mais essentielle : $\forall\, f \in \mathcal{R} \quad \big[\, f \in \mathcal{R}_\bullet \;\Leftrightarrow\; \{f\} = 0 \,\big]$;
on en déduit clairement $\underline{\mathcal{R}^\bullet} = \underline{\mathcal{R}}$ et $\underline{\mathcal{E}^\bullet} = \underline{\mathcal{E}}$; de plus $\boxed{\forall\, f \in \mathcal{R}^\bullet \quad \|\{f\}\|_{\mathrm{B}} = \|f\|}$.
L'application $\mathcal{R}^\bullet \to \underline{\mathcal{R}} \,:\, f \to \{f\}$ est donc une isométrie bijective entre les espaces normés $\big(\mathcal{R}^\bullet, \|\ \|\big)$ et $\big(\underline{\mathcal{R}}\,, \|\ \|_{\mathrm{B}}\big)$; elle fait en outre correspondre les espaces $\mathcal{E}^\bullet$ et $\underline{\mathcal{E}}$; le théorème résulte alors de la densité de $\mathcal{E}^\bullet$ dans $\mathcal{R}^\bullet$ pour la norme $\|\ \|$.

<u>Remarque</u> : La fermeture de $\underline{\mathcal{E}}$ pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$ n'apportant rien de foncièrement nouveau, l'intérêt de cette topologie s'en trouve fortement réduit ; en fait la norme $\|\ \|_{\mathrm{B}}$ est plus utile comme *borne* que comme *norme*.

3.9.* <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B} \quad \boxed{|\tilde f| \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}}$ et $\boxed{\|\tilde f\|_2^2 \le \|\tilde f\|_{\mathrm{B}}\, \|\tilde f\|_1}$.

3.10.* <u>Corollaire</u> : Soit une suite $\tilde f_n \in \mathcal{B}$ telle que $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f \in \mathcal{L}^1$; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\tilde f_n| \le M$; alors on a $\boxed{\|\tilde f\|_{\mathrm{B}} \le M \quad \text{et} \quad \tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f}$.

3.11. <u>Théorème</u> : Soit une suite $\tilde f_n \in \mathcal{L}^2$ telle que $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f \in \mathcal{L}^1$; supposons qu'il existe $\widetilde F \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\tilde f_n| \le \widetilde F$; alors on a $\boxed{\tilde f \in \mathcal{L}^2 \quad \text{et} \quad \tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; -\widetilde F \le \tilde f_n \le \widetilde F$, donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \;\; -\widetilde F(h) \le \tilde f_n(h) \le \widetilde F(h)$;
or $\forall\, h \in \mathcal{E} \quad \tilde f_n(h) \to \tilde f(h)$; donc $\forall\, h \in \mathcal{E}^+ \;\; -\widetilde F(h) \le \tilde f(h) \le \widetilde F(h)$,
donc $-\widetilde F \le \tilde f \le \widetilde F$, donc $|\tilde f| \le \widetilde F$, donc $\tilde f \in \mathcal{L}^2$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\tilde g_n = |\tilde f_n - \tilde f| \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$; on a $\tilde g_n \xrightarrow{1} 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \tilde g_n \le 2\,\widetilde F = \widetilde G \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\big\|\widetilde G - (k \wedge \widetilde G)\big\|_2 \le \varepsilon$;

on a $\|\tilde g_n\|_2 \le \|k\wedge \tilde g_n\|_2 + \|\tilde g_n - (k\wedge \tilde g_n)\|_2$; or $\forall n\in \mathbb{N}$ on a

$0 \le k\wedge \widetilde G - k\wedge \tilde g_n \le \widetilde G - \tilde g_n$; donc $\tilde g_n - (k\wedge \tilde g_n) \le \widetilde G - (k\wedge \widetilde G)$,

donc $\|\tilde g_n - (k\wedge \tilde g_n)\|_2 \le \left\|\widetilde G - (k\wedge \widetilde G)\right\|_2 \le \varepsilon$; donc $\|\tilde g_n\|_2 \le \|k\wedge \tilde g_n\|_2 + \varepsilon$;

or la suite $k\wedge \tilde g_n$ est bornée (par k) et on a $k\wedge \tilde g_n \xrightarrow{1} 0$, donc $k\wedge \tilde g_n \xrightarrow{2} 0$;

donc $\overline{\lim_n}\ \|\tilde g_n\|_2 \le \varepsilon$; comme ε est arbitraire on a $\tilde g_n \xrightarrow{2} 0$, c-à-d $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f$.

3.12.* Théorème : $\forall \tilde f \in \mathcal{B}\ \ \forall \tilde g\in \mathcal{L}^2$ on a $\left\|\tilde f\,\tilde g\right\|_2 \le \left\|\tilde f\right\|_{\mathrm B}\|\tilde g\|_2$.

3.13.* Théorème : $\forall \tilde f, \tilde g\in \mathcal{B}$ on a 1) $\tilde f\,\tilde g\in\mathcal{B}$

2) $\left\|\tilde f\,\tilde g\right\|_{\mathrm B} \le \left\|\tilde f\right\|_{\mathrm B}\|\tilde g\|_{\mathrm B}$.

3.14.* Théorème : $\mathcal{B}$ est un sous-espace cohérent et intégral de $\mathcal{M}$.

3.15.* Théorème : $\mathcal{B}$ est une algèbre de Riesz-Banach pour la norme $\|\ \|_{\mathrm B}$.

3.16.* Théorème : $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{B}$.

3.17. Théorème de convergence monotone dans $\mathcal{L}^2$:

Soit $\tilde f_n\in\mathcal{L}^2$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left\|\tilde f_n\right\|_2 \le M$; alors $\tilde f_n$ converge en norme $\|\ \|_2$ vers une fonctionnelle $\tilde f\in\mathcal{L}^2$; on a donc aussi $\lim_n \left\|\tilde f_n\right\|_2 = \left\|\tilde f\right\|_2$.

Dém : On peut supposer la suite $\tilde f_n$ croissante et positive ; on démontre comme dans le cas de $\mathcal{PM}$ que $\forall h\in\mathcal{E}$ $\tilde f_n(h)$ converge dans $\mathbb{R}$; on définit $\forall h\in\mathcal{E}$ $\tilde f(h) = \lim_n \tilde f_n(h)$; $\tilde f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$; de plus $\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f$ et $\forall h\in\mathcal{E}$ $\left|\tilde f(h)\right| = \lim_n \left|\tilde f_n(h)\right| \le M\|h\|_2$; donc $\tilde f\in\mathcal{L}^2$; on peut donc écrire $\forall n\in\mathbb{N}$ $0\le \tilde f_n \le \tilde f\in\mathcal{L}^2$; on en déduit $\tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f$, d'après le Théorème 3.11.

3.18.* Lemme : $\forall f, g\in\mathcal{R}$ $\|f\,g\|_1 \le \|f\|_{\mathrm B}\,\|g\|_1$.

3.19. Définition :

$\forall \tilde f\in\mathcal{B}$ et $\forall \tilde g\in\mathcal{L}^1$ on définit le produit $\tilde f\,\tilde g$ de la manière suivante : soit une suite $g_n\in\mathcal{E}$ telle que $g_n \xrightarrow{1} \tilde g$; alors on a $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left\|\tilde f g_n - \tilde f\,\tilde g\right\|_1 \le \left\|\tilde f\right\|_{\mathrm B}\|g_n - \tilde g\|_1$; $\tilde f g_n$ étant une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$ on peut donc poser $\boxed{\tilde f\,\tilde g = {}^1\!\lim_n\ \tilde f g_n} \in\mathcal{L}^1$.

On montre facilement que le produit $\tilde f\,\tilde g$ ne dépend pas de la suite particulière $g_n \xrightarrow{1} \tilde g$.

3.20.* Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \not{\mathcal{B}} \quad \forall\, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1$ on a 1) $\tilde{f}\,\tilde{g} \in \mathcal{L}^1$

2) $|\tilde{f}\,\tilde{g}| = |\tilde{f}|\,|\tilde{g}|$

3) $\|\tilde{f}\,\tilde{g}\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}}\,\|\tilde{g}\|_1$.

§ 4. Fonctions *versus* fonctionnelles

4.1. Définition : $\forall\, f \in \mathcal{W}$ on pose $\boxed{\{f\} = f.\{\mathbb{1}\}} \in \mathcal{M}$;

$\{f\}$ est donc la mesure $\boxed{\mathcal{E} \to \mathbb{R} \,:\, g \mapsto \int_a^b f\, g\, dx}$.

Nous verrons plus loin qu'en fait $\forall\, f \in \mathcal{W} \;\; \{f\} \in \mathcal{L}^1$; on appelle $\{f\}$ la fonctionnelle associée à f ; c'est la généralisation de la Définition 2.6. du Chapitre I.

Comme dans $\underline{\mathcal{R}}$ on remplacera communément la notation $\{f\}$ par la notation f.

4.2.* Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W} \to \mathcal{M} \,:\, f \mapsto \{f\}}$ est un morphisme de Riesz.

4.3.* Corollaire : $\boxed{\forall\, f, g \in \mathcal{W} \quad \{f \vee g\} = \{f\} \vee \{g\} \quad \text{et} \quad \{f \wedge g\} = \{f\} \wedge \{g\}}$.

4.4. Théorème : $\boxed{\text{Soient } f_n\,, f \in \mathcal{W} \text{ tels que } f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f \,;\, \text{alors } \{f_n\} \xrightarrow{\times} \{f\}}$.

Dém : C'est le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{W}$ appliqué à $\tilde{\mu} = \{\mathbb{1}\}$.

Notation : On note $\underline{\mathcal{W}} = \big\{ \{f\} \in \mathcal{M} \;\|\; f \in \mathcal{W} \big\} \subset \mathcal{M}$; c'est l'image du morphisme du Théorème 4.2. On utilise une notation analogue pour tous les *sous-ensembles* de $\mathcal{W}$.

4.5. Théorème : $\boxed{\underline{\mathcal{W}} \subset \not{\mathcal{B}}}$ et $\forall\, f \in \mathcal{W}$ $\boxed{\|f\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|}$.

Dém : Soit d'abord $f \in \mathcal{PR}$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{b}} f$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|$; alors on a $\{f_n\} \xrightarrow{\star} \{f\}$, donc $\{f\} \in \mathcal{L}^1$; de plus $\|\{f\}\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|$, donc $\{f\} \in \not{\mathcal{B}}$.

Soit ensuite $f \in \mathcal{W}$ et soit $\mathcal{A} = \big\{ \{g\} \;\|\; g \in \mathcal{PR} \text{ et } g \leq f \big\} \subset \mathcal{L}^1$; comme $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{L}^1$ dominée supérieurement et stable pour la loi $\vee$, on a par définition

$\{f\} = \text{Sup}\,\mathcal{A}$; il existe donc une suite $g_n \in \mathcal{PR}$ telle que $\{g_n\} \overset{\star}{\to} \{f\}$; donc $\{f\} \in \mathcal{L}^1$. De plus $\forall\, g \in \mathcal{A}$ on a $\|g\|_{\mathrm{B}} \leq \|g\| \leq \|f\|$, donc $\|\{f\}\|_{\mathrm{B}} \leq \|f\|$, donc $\{f\} \in \mathcal{B}$.

4.6. Théorème : $\boxed{\mathcal{W} = \mathcal{B}}$.

Ce théorème signifie qu'en fait l'application $\mathcal{W} \to \mathcal{B} : f \mapsto \{f\}$ est surjective. Plus précisément tout $\tilde{f} \in \mathcal{B}$ peut être représentée comme une limite simple bornée de fonctions pseudo-réglées.

Dém : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{B}$; soit une suite bornée $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $\{f_n\} \overset{1}{\to} \tilde{f}$; en considérant éventuellement une sous-suite on peut supposer $\boxed{\{f_n\} \overset{\times}{\to} \tilde{f}}$.

Posons $\forall\, p \geq n \in \mathbb{N}$ $\quad g_{n,p} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \ldots \wedge f_p \in \mathcal{E}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $g_n = \inf\limits_{r \geq n} f_r \in \mathcal{PR}$; quand $p \to +\infty$ on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $g_{n,p} \overset{\mathrm{b}}{\to} g_n$, donc $\big\{g_{n,p}\big\} \overset{\times}{\to} \big\{g_n\big\}$, c-à-d $\{f_n\} \wedge \{f_{n+1}\} \wedge \ldots \wedge \{f_p\} \overset{\times}{\to} \{g_n\}$, c-à-d $\underset{r \geq n}{\text{Inf}}\, \{f_r\} = \big\{g_n\big\}$. Posons $g = \sup\limits_n g_n = \underline{\lim\limits_n}\, f_n \in \mathcal{W}$; on a $g_n \overset{\mathrm{b}}{\to} g$, donc $\big\{g_n\big\} \overset{\times}{\to} \{g\}$, c-à-d $\underset{n}{\text{Sup}}\, \big\{g_n\big\} = \{g\}$, c-à-d $\underset{n}{\underline{\text{Lim}}}\, \{f_n\} = \underset{n}{\text{Sup}} \Big(\underset{r \geq n}{\text{Inf}}\, \{f_r\}\Big) = \{g\}$; or $\{f_n\} \overset{\times}{\to} \tilde{f}$, donc $\tilde{f} = \underset{n}{\underline{\text{Lim}}}\, \{f_n\} = \{g\} \in \underline{\mathcal{W}}$. La fonctionnelle bornée $\tilde{f}$ peut donc être représentée par $g \in \mathcal{W}$ qui est limite simple bornée des fonctions $g_n \in \mathcal{PR}$.

4.7.* Théorème :

L'application $\boxed{\mathcal{W} \to \mathcal{B} : f \mapsto \{f\}}$ est un algébromorphisme de Riesz.

4.8.* Corollaire : $\boxed{\forall\, f,\, g \in \mathcal{W} \quad \{f\,g\} = \{f\}\,\{g\} = f\,.\{g\}}$.

4.9.* Théorème : 1) $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{B}$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}$.

2) $\mathcal{B}$ est un algébromodule de Riesz sur $\mathcal{W}$.

4.10. Définition : On pose $\mathcal{Z} = \big\{ f \in \mathcal{W} \,\big\|\, \{f\} = 0 \big\}$; c'est l'espace des fonctions universelles *nulles presque partout*.

4.11.* Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{W}$ on a $\Big[f \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \displaystyle\int_a^b |f|\, dx = 0 \Big]$.

4.12.* Théorème : $\mathcal{Z}$ est un idéal cohérent et intégral de $\mathcal{W}$; de plus on a $\boxed{\mathcal{B} \cong \mathcal{W}/\mathcal{Z}}$

§ 5. Fonctionnelles caractéristiques sur [a,b]

Les fonctionnelles *caractéristiques* jouent dans notre théorie le rôle des (classes de) sous-ensembles mesurables de [a,b].

5.1. Définition : $\tilde f \in \mathcal{L}^2$ est une fonctionnelle caractéristique sur [a,b] ssi $\boxed{\tilde f^{\,2} = \tilde f}$.

On note $\mathcal{K} = \{\, \tilde f \in \mathcal{L}^2 \parallel \tilde f^{\,2} = \tilde f \,\}$.

5.2. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{K}$ on a $0 \le \tilde f \le 1$ et $1 - \tilde f \in \mathcal{K}$.

Dém : On a $\tilde f = \tilde f^{\,2} \ge 0$; de plus $(1 - \tilde f)^2 = 1 - 2\,\tilde f + \tilde f^{\,2} = 1 - \tilde f$, donc $1 - \tilde f \in \mathcal{K}$ et $1 - \tilde f \ge 0$.

5.3. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{K}$ on a $\tilde f \le \tilde g \Leftrightarrow \tilde f \tilde g = \tilde f$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: On a $\tilde g \le \mathbb{1}$, donc $\tilde f \tilde g \le \tilde f$; par ailleurs $\tilde f\,(\tilde g - \tilde f) \ge 0$, donc $\tilde f \tilde g \ge \tilde f$.

b) $\Leftarrow$: On a $\tilde g - \tilde f = \tilde g - \tilde f \tilde g = \tilde g\,(1 - \tilde f) \ge 0$.

5.4. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{K}$ on a $\tilde f \le \tilde g \Leftrightarrow \tilde g - \tilde f \in \mathcal{K}$.

Dém : On a $(\tilde g - \tilde f)^2 - (\tilde g - \tilde f) = \tilde f + \tilde g - 2\,\tilde f \tilde g - \tilde g + \tilde f = 2\,(\tilde f - \tilde f \tilde g)$, donc $\tilde g - \tilde f \in \mathcal{K}$ ssi $\tilde f \tilde g = \tilde f$, c-à-d ssi $\tilde f \le \tilde g$.

5.5. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{K}$ on a $\tilde f \vee \tilde g \in \mathcal{K}$, $\tilde f \wedge \tilde g \in \mathcal{K}$ et $|\tilde f - \tilde g| \in \mathcal{K}$.

Dém : $(\tilde f \vee \tilde g)^2 = \tilde f^{\,2} \vee \tilde g^{\,2} = \tilde f \vee \tilde g$ et $(\tilde f \wedge \tilde g)^2 = \tilde f^{\,2} \wedge \tilde g^{\,2} = \tilde f \wedge \tilde g$; d'autre part $|\tilde f - \tilde g| = \tilde f \vee \tilde g - \tilde f \wedge \tilde g$, or $\tilde f \wedge \tilde g \le \tilde f \vee \tilde g$, donc $|\tilde f - \tilde g| \in \mathcal{K}$.

5.6. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{K}$ on a $\tilde f \tilde g = \tilde f \wedge \tilde g$.

Dém : On a $|\tilde f - \tilde g| = |\tilde f - \tilde g|^2 = (\tilde f - \tilde g)^2 = \tilde f + \tilde g - 2\,\tilde f \tilde g$, donc $\tilde f \tilde g = \frac{1}{2}\big(\tilde f + \tilde g - |\tilde f - \tilde g|\big) = \tilde f \wedge \tilde g$.

5.7. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{K}$ on a $\boxed{\|\tilde f\|_1 = \|\tilde f\|_2^2}$.

5.8.* Théorème : $\forall\, \tilde f_n, \tilde f \in \mathcal{K}$ on a $\boxed{\tilde f_n \xrightarrow{1} \tilde f \Leftrightarrow \tilde f_n \xrightarrow{2} \tilde f}$.

5.9.* <u>Théorème</u> : $\mathcal{K}$ est une partie <u>fermée</u> de $\mathcal{L}^2$ et de $\mathcal{L}^1$.

<u>Dém</u> : Soit $f_n \in \mathcal{K}$ convergeant en norme $\| \, \|_2$ vers $f \in \mathcal{L}^2$; alors $f_n(1-f_n)$ converge en norme $\| \, \|_1$ vers $f(1-f) \in \mathcal{L}^1$; or $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f_n(1-f_n) = 0$; donc $f(1-f) = 0$ et $f \in \mathcal{K}$.

5.10.* <u>Corollaire</u> : Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{K}$; alors $\operatorname{Inf} \mathcal{A} \in \mathcal{K}$ et $\operatorname{Sup} \mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

5.11. <u>Définition</u> : On note $\boxed{\mathcal{EK} = \{ f \in \mathcal{E} \,\|\, f^2 = f \} = \{ f \in \mathcal{R} \,\|\, f^2 = f \}}$.

5.12. <u>Théorème</u> : $\boxed{\underline{\mathcal{EK}} = \underline{\mathcal{E}} \cap \mathcal{K} \text{ est dense dans } \mathcal{K}}$.

<u>Dém</u> : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{K}$; soient $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{E}^+$ tel que $\| \tilde{f} - g \|_1 \leq \varepsilon$;

posons $h = 1\!\!1 \wedge g$; on a $\| \tilde{f} - h \|_1 = \| 1\!\!1 \wedge \tilde{f} - 1\!\!1 \wedge g \|_1 \leq \| \tilde{f} - g \|_1 \leq \varepsilon$;

on peut écrire $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r 1_{\mathrm{I}_r}$, où les I_r sont des intervalles formant une <u>partition</u> de $[a, b]$ et où $\forall\, r \in [[1, n]] \quad \alpha_r \in [0, 1]$.

On a $\forall\, r \in [[1, n]] \quad (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} = (1 - \alpha_r) \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} - \alpha_r (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r}$;

or $\tilde{f} \wedge (1 - \tilde{f}) = 0$, donc $|(\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r}| = (1 - \alpha_r) \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} + \alpha_r (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r}$,

donc $\| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 = (1 - \alpha_r) \| \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 + \alpha_r \| (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1$;

par convexité on peut donc écrire

$$\boxed{\text{ou bien } \| \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \leq \| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1, \text{ ou bien } \| (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \leq \| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1} ;$$

$\forall\, r \in [[1, n]]$ posons $\beta_r = 0$ ou 1 suivant que

$$\boxed{\| \tilde{f} 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \leq \| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \quad \text{ou} \quad \| (1 - \tilde{f}) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \leq \| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1} ;$$

on a donc $\forall\, r \in [[1, n]] \quad \| (\tilde{f} - \beta_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \leq \| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1$;

posons $k = \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_r 1_{\mathrm{I}_r} \in \mathcal{EK}$; on a $\tilde{f} - k = \sum\limits_{r=1}^{n} (\tilde{f} - \beta_r) 1_{\mathrm{I}_r}$, donc

$\| \tilde{f} - k \|_1 = \sum\limits_{r=1}^{n} \| (\tilde{f} - \beta_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 \leq \sum\limits_{r=1}^{n} \| (\tilde{f} - \alpha_r) 1_{\mathrm{I}_r} \|_1 = \| \tilde{f} - h \|_1 \leq \varepsilon$.

<u>Notation</u> : Dans certains contextes, à des fins de clarification et de simplification, nous noterons les fonctionnelles caractéristiques, c-à-d les éléments de $\mathcal{K}$, par des lettres grecques minuscules sans tilde.

5.13. Théorème :

Soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{K}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$; alors $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\sigma_n \tilde{f} \xrightarrow{1} 0$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; soit $\alpha > 0$ tel que $\big\| |\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha \big\|_1 \leq \varepsilon$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad \|\sigma_n\|_1 \leq \varepsilon/\alpha$; on a $\sigma_n |\tilde{f}| = \sigma_n \big(|\tilde{f}| \wedge \alpha\big) + \sigma_n \big(|\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha\big)$ $\leq \sigma_n \alpha + |\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha$; on en déduit $\forall n \geq N$
$\big\|\sigma_n \tilde{f}\big\|_1 \leq \alpha \|\sigma_n\|_1 + \big\| |\tilde{f}| - |\tilde{f}| \wedge \alpha \big\|_1 \leq 2\,\varepsilon$; donc $\sigma_n \tilde{f} \xrightarrow{1} 0$.

5.14. Théorème : Soit R un ouvert de $[a,b]$; alors R est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints J_k ; de plus $\mathbb{1}_{\mathsf{R}} \in \mathcal{PR}$ et $\boxed{\|\mathbb{1}_{\mathsf{R}}\|_1 = \sum_k |J_k|}$.

Dém : $\forall x \in \mathsf{R}$ notons J_x l'intervalle *ouvert* de longueur maximum contenant x ; il est clair que $\big[\, J_x \cap J_y \neq \emptyset \;\Rightarrow\; J_x = J_y \,\big]$; les J_x sont donc disjoints. Considérons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble des J_x tels que $|J_x| \geq \dfrac{1}{n}$; puisque la somme des longueurs de ces intervalles est inférieure à $b - a$, leur nombre est nécessairement fini ; on en conclut que l'ensemble de *tous* les J_x est fini ou dénombrable ; par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}^*$ notons R_n la réunion des J_x tels que $|J_x| \geq \dfrac{1}{n}$; R_n est une suite croissante et on a $\mathsf{R} = \bigcup_n \mathsf{R}_n$, donc $\mathbb{1}_{\mathsf{R}} = \sup_n \mathbb{1}_{\mathsf{R}_n}$; on en déduit $\mathbb{1}_{\mathsf{R}} \in \mathcal{PR}$ et $\|\mathbb{1}_{\mathsf{R}}\|_1 = \sup_n \|\mathbb{1}_{\mathsf{R}_n}\|_1 = \sum |J_x|$.

5.15. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{K}$; alors il existe une suite décroissante d'ouverts R_n de $[a,b]$ telle que $\tilde{f} = \operatorname{Inf}_n \mathbb{1}_{\mathsf{R}_n}$; de même il existe une suite croissante de fermés F_n de $[a,b]$ telle que $\tilde{f} = \operatorname{Sup}_n \mathbb{1}_{\mathsf{F}_n}$.

Dém : Soit une suite de $\mathcal{EK}$ convergeant en norme $\|\ \|_1$ vers $\tilde{f}$; on peut en extraire une sous-suite $f_n \in \mathcal{EK}$ convergeant finement vers $\tilde{f}$. Identifions les fonctions f_n à des fonctions caractéristiques d'ouverts de $[a,b]$; soient donc A_n des ouverts de $[a,b]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \mathbb{1}_{\mathsf{A}_n}$; alors la suite $\tilde{g}_n = \operatorname{Sup}_{p \geq n} \mathbb{1}_{\mathsf{A}_p}$ est décroissante et $\tilde{f} = \operatorname{Inf}_n \tilde{g}_n$. En identifiant la fonctionnelle $\tilde{g}_n$ à la fonction caractéristique de l'ouvert $\mathsf{R}_n = \bigcup_{p \geq n} \mathsf{A}_p$, on obtient bien $\tilde{f} = \operatorname{Inf}_n \mathbb{1}_{\mathsf{R}_n}$.

De même nous pouvons identifier les fonctions f_n à des fonctions caractéristiques de fermés de $[a,b]$; soient B_n des fermés de $[a,b]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \mathbb{1}_{\mathsf{B}_n}$; alors la suite $\tilde{h}_n = \operatorname{Inf}_{p \geq n} \mathbb{1}_{\mathsf{B}_p}$ est croissante et $\tilde{f} = \operatorname{Sup}_n \tilde{h}_n$. En identifiant la fonctionnelle $\tilde{h}_n$ à la fonction caractéristique du fermé $\mathsf{F}_n = \bigcap_{p \geq n} \mathsf{B}_p$, on obtient bien $\tilde{f} = \operatorname{Sup}_n \mathbb{1}_{\mathsf{F}_n}$.

5.16.* Corollaire : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{K}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \inf_{\substack{\mathsf{R}\text{ ouvert} \\ 1_{\mathsf{R}} \geq \tilde{f}}} \|\mathbb{1}_{\mathsf{R}}\|_1 = \sup_{\substack{\mathsf{F}\text{ fermé} \\ 1_{\mathsf{F}} \leq \tilde{f}}} \|\mathbb{1}_{\mathsf{F}}\|_1}$.

Remarque : Ce résultat correspond à la définition *classique* de la “mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable”.

§ 6. Pseudo-mesures booléennes

6.1. Définition : Un treillis T est distributif ss'il vérifie la double distributivité :

$$\boxed{\forall\, a\,,\, b\,,\, c \in \mathrm{T} \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{et} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)}\,.$$

6.2. Théorème : Chacune des deux distributivités implique l'autre.

Dém : Supposons la première distributivité vérifiée ; alors on peut écrire $\forall\, a\,,\, b\,,\, c \in \mathrm{T}$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [\,(a \vee b) \wedge a\,] \vee [\,(a \vee b) \wedge c\,] = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

$= a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$.

6.3. Définition :

Un treillis *distributif* T est un treillis de Boole ss'il satisfait aux conditions suivantes :

1) T possède un élément minimum noté $\mathbf{0}$ et un élément maximum noté $\mathbf{1}$.

2) $\forall\, a \in \mathrm{T}$ il existe $b \in \mathrm{T}$ tel que $\boxed{a \wedge b = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad a \vee b = \mathbf{1}}$;

(b est totalement déterminé par a et se note $\bar{a}$).

Exemples : $\mathcal{E}\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ sont des treillis de Boole.

6.4. Définition : Une fonction additive bornée sur un treillis de Boole T est une application $\phi : \mathrm{T} \to \mathrm{I\!R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{T}$ $\boxed{a \wedge b = 0 \;\Rightarrow\; \phi\,(a \vee b) = \phi\,(a) + \phi\,(b)}$;

en particulier $\boxed{\phi\,(\mathbf{0}) = 0}$.

2) Il existe $M > 0$ tel que $\boxed{\forall\, a \in \mathrm{T} \quad |\phi\,(a)| \leq M}$.

La condition 1) implique $\forall\, a\,,\, b \in \mathrm{T}$ $\boxed{\phi\,(a \vee b) + \phi\,(a \wedge b) = \phi\,(a) + \phi\,(b)}$.

6.5. Définition : Une pseudo-mesure booléenne sur [a,b] est une fonction additive bornée sur le $\boxed{\text{treillis de Boole } \mathcal{EK}}$.

Notation : On note $\mathcal{PM}_B$ l'espace vectoriel des pseudo-mesures booléennes sur [a,b].

6.6. Théorème : Toute pseudo-mesure booléenne sur [a,b] s'étend de manière unique en une pseudo-mesure sur [a,b].

Dém :

Soit $\phi \in \mathcal{PM}_B$; soit $h \in \mathcal{EK}$; on peut écrire $h = \sum_r \alpha_r 1_{\mathrm{I}_r}$ (avec $\forall r \;\; \alpha_r \in \mathrm{I\!R}$), où les I_r sont des intervalles disjoints deux à deux ; on pose alors $\boxed{\phi(h) = \sum_r \alpha_r \, \phi(1_{\mathrm{I}_r})}$; on voit, grâce à la propriété 1), que cette valeur est indépendante de la décomposition choisie pour h. De plus on a $\left|\tilde{f}(h)\right| \leq \sum_r |\alpha_r| \, |\phi(1_{\mathrm{I}_r})| \leq \|h\| \sum_r |\phi(1_{\mathrm{I}_r})| \leq M \, \|h\|$. Il n'est pas difficile de montrer que cette extension de $\tilde{f}$ à $\mathcal{E}$ est linéaire ; donc $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$. L'unicité est évidente car $\forall \phi \in \mathcal{PM}$ on a nécessairement $\phi(h) = \sum_r \alpha_r \, \phi(1_{\mathrm{I}_r})$.

6.7. Corollaire :

L'application $\mathcal{PM} \to \mathcal{PM}_B \; : \; \tilde{f} \to \tilde{f}|_{\mathcal{EK}}$ est un isomorphisme linéaire.

Autrement dit une pseudo-mesure booléenne n'est ni plus ni moins que la restriction d'une pseudo-mesure à $\mathcal{EK}$, ce qui peut s'écrire $\boxed{\mathcal{PM}_B = \mathcal{PM}|_{\mathcal{EK}}}$.

Notation : Soit a_n une suite dans un treillis de Boole ; *en cas d'existence*, on note $\bigvee_n a_n$ le majorant minimum de a_n et $\bigwedge_n a_n$ le minorant maximum de a_n.

6.8. Définition : Un treillis de Boole T est complet ssi $\bigvee_n a_n$ et $\bigwedge_n a_n$ existent pour toute suite $a_n \in \mathrm{T}$.

Exemple : $\mathcal{K}$ est un treillis complet de Boole.

6.9. Définition : Une fonction additive bornée ϕ sur un treillis *complet* de Boole T est dite σ-additive ssi elle satisfait l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

Condition (1) :

Soit une suite $a_n \in \mathrm{T}$ *telle que* $\forall i \neq j \;\; a_i \wedge a_j = 0$ *; alors* $\phi\left(\bigvee_n a_n\right) = \sum_n \phi(a_n)$.

Condition (2) : *Soit une suite* $a_n \in \mathrm{T}$, *décroissante ; alors* $\phi\left(\bigwedge_n a_n\right) = \lim_n \phi(a_n)$.

Condition (3) : *Soit une suite* $a_n \in \mathrm{T}$, *décroissante et telle que* $\boxed{\bigwedge_n a_n = \mathbf{0}}$; *alors* $\phi(a_n) \to 0$.

La condition (3) est remarquable car, contrairement aux deux autres, elle a un sens pour n'importe quel treillis de Boole, complet ou non.

Appliquée au treillis de Boole $\mathcal{EK}$, cette condition s'écrit :

6.10. Définition :

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f}$ est σ-additive ssi $\tilde{f}$ vérifie la condition suivante :

Condition (4) :

Soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$, *décroissante et telle que* $\boxed{\sigma_n \overset{\circ}{\to} 0}$; *alors* $\tilde{f}(\sigma_n) \to 0$.

Par ailleurs la condition d'hypercontinuité, donnée au I 8.1, peut se réécrire :

6.11. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ ssi $\tilde{f}$ vérifie la condition suivante :

Condition (5) : *Soit une suite décroissante d'intervalles ouverts* $\mathrm{J}_n \subset [a,b]$, *telle que* $\bigcap_n \mathrm{J}_n = \emptyset$ $\big($*c-à-d* $\mathbb{1}_{\mathrm{J}_n} \overset{\circ}{\to} 0\big)$; *alors* $\tilde{f}(\mathbb{1}_{\mathrm{J}_n}) \to 0$.

Le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{E}$ nous assure que la condition (5), a priori plus faible que la condition (4), lui est en fait équivalente. On en tire la conclusion suivante :

6.12. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \tilde{f} \text{ est } \sigma\text{-additive}}$.

Autrement dit une pseudo-mesure est σ-additive ssi elle est une mesure.

Le théorème de Lebesgue dans $\mathcal{E}$ nous permet aussi d'énoncer le théorème suivant :

6.13. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \overset{\circ}{\to} 0 \;\Rightarrow\; \tilde{f}(\sigma_n) \to 0}.$$

§ 7. Support d'une pseudo-mesure

Le *support* d'une fonctionnelle correspond à la notion classique du support d'une fonction, mais notre définition est suffisamment générale pour s'appliquer de fait à toutes les pseudo-mesures. Cette extension se révèlera très précieuse pour la bonne compréhension (et la démonstration) du théorème de Radon-Nikodym.

7.1. Définition : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$: $\boxed{\underline{\text{support}} \text{ de } \tilde f = \mathrm{S}(\tilde f) = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1} \wedge \big(n\,|\tilde f\,|\big)}$.

$\mathrm{S}(\tilde f)$ est bien défini grâce au théorème de convergence monotone : en effet $\mathbb{1} \wedge \big(n\,|\tilde f\,|\big)$ est une suite croissante et majorée par $\mathbb{1}$ dans $\mathcal{PM}^+$; remarquons de plus qu'on a $\mathrm{S}(\tilde f) \leq \mathbb{1}$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{B}^+$; nous verrons qu'en fait $\mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}$.

Cette définition s'interprète aisément en constatant que :

$$\mathrm{S}(\tilde{\mathbf{f}}) = \mathbf{0} \text{ “là où” } \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \text{ et } \mathrm{S}(\tilde{\mathbf{f}}) = \mathbf{1} \text{ “là où” } \tilde{\mathbf{f}} \neq \mathbf{0}\,.$$

7.2.* Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a 1) $\boxed{0 \leq \mathrm{S}(\tilde f) \leq \mathbb{1}}$

2) $\boxed{\mathrm{S}\big(|\tilde f\,|\big) = \mathrm{S}(\tilde f)}$

3) $\boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^\star \quad \mathrm{S}(\lambda \tilde f) = \mathrm{S}(\tilde f)}$

4) $\boxed{\mathrm{S}\big(\mathbb{1} \wedge |\tilde f\,|\big) = \mathrm{S}(\tilde f)}$.

7.3. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a 1) $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) \wedge \mathrm{S}(\tilde g)}$

2) $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f \vee \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) \vee \mathrm{S}(\tilde g)}$.

Dém :

1) $1 \wedge \big[n\,(\tilde f \wedge \tilde g)\big] = \big[1 \wedge (n \tilde f)\big] \wedge \big[1 \wedge (n \tilde g)\big]$, donc $\mathrm{S}(\tilde f \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) \wedge \mathrm{S}(\tilde g)$

2) $1 \wedge \big[n\,(\tilde f \vee \tilde g)\big] = \big[1 \wedge (n \tilde f)\big] \vee \big[1 \wedge (n \tilde g)\big]$, donc $\mathrm{S}(\tilde f \vee \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) \vee \mathrm{S}(\tilde g)$.

7.4.* Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\Big[\, \tilde f \leq \tilde g \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(\tilde f) \leq \mathrm{S}(\tilde g) \Big]$.

7.5. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f + \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) \vee \mathrm{S}(\tilde g) \leq \mathrm{S}(\tilde f) + \mathrm{S}(\tilde g)}$.

Dém : On a $\tilde f \vee \tilde g = \frac{1}{2}\big(\tilde f + \tilde g + |\tilde f + \tilde g\,|\big) \leq \frac{1}{2}(\tilde f + \tilde g + \tilde f + \tilde g) = \tilde f + \tilde g$, donc $\mathrm{S}(\tilde f \vee \tilde g) \leq \mathrm{S}(\tilde f + \tilde g)$; de plus on a clairement $\tilde f \vee \tilde g \geq \frac{1}{2}(\tilde f + \tilde g)$; donc $\mathrm{S}(\tilde f \vee \tilde g) = \mathrm{S}\big[\frac{1}{2}(\tilde f \vee \tilde g)\big] \leq \mathrm{S}(\tilde f + \tilde g) \leq \mathrm{S}(\tilde f \vee \tilde g)$.

7.6. Corollaire : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\Big[\, \tilde f \wedge \tilde g = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(\tilde f + \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) + \mathrm{S}(\tilde g) \Big]$.

Dém : $\mathrm{S}(\tilde f + \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f \vee \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) \vee \mathrm{S}(\tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) + \mathrm{S}(\tilde g) - \mathrm{S}(\tilde f) \wedge \mathrm{S}(\tilde g)$ $= \mathrm{S}(\tilde f) + \mathrm{S}(\tilde g) - \mathrm{S}(\tilde f \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f) + \mathrm{S}(\tilde g)$.

7.7.* Corollaire : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{S}(\tilde f^+) \vee \mathrm{S}(\tilde f^-) = \mathrm{S}(\tilde f^+) + \mathrm{S}(\tilde f^-)}$.

7.8. <u>Lemme</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\mathbb{1} \wedge \tilde f^2 \leq \mathbb{1} \wedge |\tilde f| \leq \mathbb{1} \vee |\tilde f| \leq \mathbb{1} \vee \tilde f^2}$.

<u>Dém</u> : Vrai dans $\mathcal{E}$, donc vrai dans $\mathcal{L}^2$ par densité.

7.9. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\left[\mathrm{S}(\tilde f)\right]^2 = \mathrm{S}(\tilde f^2) = \mathrm{S}(\tilde f)}$.

<u>Dém</u> : $\left[\mathrm{S}(\tilde f)\right]^2 = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{1} \wedge n\,|\tilde f|\right)^2 = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1} \wedge \left(n^2 \tilde f^2\right) = \mathrm{S}\left(\tilde f^2\right)$;
or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{1} \wedge \left(n^2 \tilde f^2\right) \leq \mathbb{1} \wedge \left(n\,|\tilde f|\right)$, donc $\mathrm{S}\left(\tilde f^2\right) \leq \mathrm{S}(\tilde f)$;
par ailleurs $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $n^2 |\tilde f| \leq \mathbb{1} \vee \left(n^4 \tilde f^2\right)$, donc $n\,|\tilde f| \leq (1/n) \vee \left(n^3 \tilde f^2\right)$,
donc $\mathbb{1} \wedge \left(n\,|\tilde f|\right) \leq \mathbb{1} \wedge \left[(1/n) \vee \left(n^3 \tilde f^2\right)\right] = \left[\mathbb{1} \wedge (1/n)\right] \vee \left[\mathbb{1} \wedge \left(n^3 \tilde f^2\right)\right]$
$= (1/n) \vee \left[\mathbb{1} \wedge \left(n^3 \tilde f^2\right)\right]$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\mathrm{S}(\tilde f) \leq 0 \vee \mathrm{S}\left(\tilde f^2\right) = \mathrm{S}\left(\tilde f^2\right)$.

7.10.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}}$.

7.11. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}}$.

<u>Dém</u> : On a $\mathbb{1} \wedge |\tilde f| \in \mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{S}\left(\mathbb{1} \wedge |\tilde f|\right) \in \mathcal{K}$.

7.12.* <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(\tilde f \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g)$.

7.13. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{1)\ \tilde f \in \mathcal{K} \qquad 2)\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \mathbb{1} \wedge (n \tilde f) = \tilde f \qquad 3)\ \mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f}.$$

<u>Dém</u> :

a) $(1) \Rightarrow (2)$: vrai dans $\mathcal{EK}$, donc vrai dans $\mathcal{K}$.

b) $(2) \Rightarrow (3)$: on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{1} \wedge (n \tilde f) = \tilde f$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = \tilde f$.

c) $(3) \Rightarrow (1)$: $\tilde f = \mathrm{S}(\tilde f) \in \mathcal{K}$.

7.14. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1} \wedge |\tilde f| = 0}$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: $\mathbb{1} \wedge |\tilde f| \leq \mathrm{S}(\tilde f) = 0$.

b) $\Leftarrow$: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{1} \wedge \left(n\,|\tilde f|\right) \leq n \wedge \left(n\,|\tilde f|\right) = n\left(\mathbb{1} \wedge |\tilde f|\right) = 0$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = 0$.

7.15. <u>Théorème</u> : $\forall \tilde{f} \in (\mathcal{L}^2)^+$ on a $\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = \tilde{f}$.

<u>Dém</u> : On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{f} \geq \tilde{f} \wedge (n\tilde{f}^2) = \tilde{f}\,[\mathbb{1} \wedge (n\tilde{f})]$, donc $\tilde{f} \geq \tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f})$;
par ailleurs on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n\tilde{f} \leq \mathbb{1} \vee (n^2\tilde{f}^2)$,
donc $\tilde{f} \leq \tilde{f} \wedge [(1/n) \vee (n\tilde{f}^2)] = [(1/n) \wedge \tilde{f}] \vee [\tilde{f} \wedge (n\tilde{f}^2)]$,
donc $\tilde{f} \leq (0 \wedge \tilde{f}) \vee [\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f})] = 0 \vee [\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f})] = \tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f})$.

7.16. <u>Théorème</u> : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2$ on a $[\,\tilde{f}\tilde{g} = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{g}) = 0\,]$.

<u>Dém</u> :

a) $\Rightarrow$: On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 = |\tilde{f}| \wedge (n\,|\tilde{f}\tilde{g}|) = |\tilde{f}|\,[\mathbb{1} \wedge (n|\tilde{g}|)]$; donc $\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{g}) = 0$.

b) $\Leftarrow$: On a $0 = |\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{g})| = |\tilde{f}|\,\mathrm{S}(|\tilde{g}|)$;
donc $0 = |\tilde{f}|\,|\tilde{g}|\,\mathrm{S}(|\tilde{g}|) = |\tilde{f}|\,|\tilde{g}| = |\tilde{f}\tilde{g}|$; donc $\tilde{f}\tilde{g} = 0$.

7.17. <u>Lemme</u> : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^2$ on a $\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = \tilde{f}$.

<u>Dém</u> : $\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = (\tilde{f}^+ - \tilde{f}^-)\,\mathrm{S}(\tilde{f}^+ - \tilde{f}^-) = (\tilde{f}^+ - \tilde{f}^-)\,[\mathrm{S}(\tilde{f}^+) + \mathrm{S}(\tilde{f}^-)]$
$= \tilde{f}^+\,\mathrm{S}(\tilde{f}^+) - \tilde{f}^-\,\mathrm{S}(\tilde{f}^-) = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^- = \tilde{f}$.

7.18. <u>Théorème</u> : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = \tilde{f}}$.

<u>Dém</u> : Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n = n \wedge \tilde{f}^+ - n \wedge \tilde{f}^- \in \mathcal{B}$; on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n\,\mathrm{S}(\tilde{g}_n) = \tilde{g}_n$;
or $\mathrm{S}(\tilde{g}_n) = \mathrm{S}(n \wedge \tilde{f}^+) + \mathrm{S}(n \wedge \tilde{f}^-) = \mathrm{S}(\tilde{f}^+) + \mathrm{S}(\tilde{f}^-) = \mathrm{S}(\tilde{f})$; donc
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{g}_n\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = \tilde{g}_n$; de plus $\tilde{g}_n \xrightarrow{1} \tilde{f}^+ - \tilde{f}^- = \tilde{f}$, donc $\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = \tilde{f}$.

7.19.* <u>Corollaire</u> : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $[\,\mathrm{S}(\tilde{f}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0\,]$.

7.20. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{f} \in (\mathcal{L}^1)^+$ et $\tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$; alors on a $\boxed{\operatorname{Sup}_n\,[\,\tilde{f} \wedge (n\tilde{g})\,] = \tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{g})}$.

<u>Dém</u> : C'est évident si $\tilde{f} \in \mathcal{E}^+$; soit alors $\tilde{f} \in (\mathcal{L}^1)^+$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{E}^+$
telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$; on a $\forall n, p \in \mathbb{N}$ $|f_n \wedge (p\,\tilde{g}) - \tilde{f} \wedge (p\,\tilde{g})| \leq |f_n - \tilde{f}|$; on pose
$\tilde{h} = \operatorname{Sup}_n\,[\,\tilde{f} \wedge (n\tilde{g})\,]$; quand $p \to +\infty$ on trouve $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n\,\mathrm{S}(\tilde{g}) - \tilde{h}| \leq |f_n - \tilde{f}|$,
et quand $n \to +\infty$ on trouve $|\tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{g}) - \tilde{h}| = 0$, c-à-d $\tilde{h} = \tilde{f}\,\mathrm{S}(\tilde{g})$.

7.21. <u>Théorème</u> : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$, $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$; alors on a $\boxed{\|\,\mathrm{S}(\tilde{f})\,\|_1 \leq \underline{\lim}_n\ \|\,\mathrm{S}(\tilde{f}_n)\,\|_1}$.

Dém :

On a $\forall\, n\,,\, p \in \mathbb{N}\ \ 1 \wedge \big(p\,|\tilde f_n|\big) \leq \mathrm{S}\big(|\tilde f_n|\big)$, donc $\big\|\, 1 \wedge \big(p\,|\tilde f_n|\big)\big\|_1 \leq \big\|\,\mathrm{S}\big(|\tilde f_n|\big)\big\|_1$;

donc $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \ \big\|\, 1 \wedge \big(p\,|\tilde f\,|\big)\big\|_1 \leq \underline{\lim}_{n}\ \big\|\,\mathrm{S}\big(|\tilde f_n|\big)\big\|_1$; en faisant $p \to +\infty$ on obtient $\big\|\,\mathrm{S}(\tilde f)\big\|_1 \leq \underline{\lim}_{n}\ \big\|\,\mathrm{S}(\tilde f_n)\big\|_1$.

7.22. Théorème : Soient $\tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{PM}$, $\tilde f_n \overset{\star}{\to} \tilde f$; alors on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f) \leq \overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{S}(\tilde f_n)}$.

Dém :

On a $\forall\, n\,,\, p \in \mathbb{N}\ \ 1 \wedge \big(p\,|\tilde f_n|\big) \leq \mathrm{S}\big(|\tilde f_n|\big)$, donc $1 \wedge \big(p\,|\tilde f_n|\big) \leq \operatorname*{Sup}_{r \geq n}\ \mathrm{S}\big(|\tilde f_r|\big)$;

donc $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \ 1 \wedge \big(p\,|\tilde f\,|\big) \leq \overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{S}\big(|\tilde f_n|\big)$; en faisant $p \to +\infty$ on obtient $\mathrm{S}(\tilde f) \leq \overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{S}(\tilde f_n)$.

7.23. Corollaire :

Soient $\tilde f_n\,,\ \tilde f \in \mathcal{PM}^+$, $\tilde f_n \overset{\star}{\to} \tilde f$, $\tilde f_n$ suite croissante ; alors on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f_n) \overset{1}{\to} \mathrm{S}(\tilde f)}$.

Dém : La suite $\mathrm{S}(\tilde f_n)$ est croissante, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{S}(\tilde f_n) \leq \mathrm{S}(\tilde f)$,

donc $\operatorname*{Sup}_{n}\ \mathrm{S}(\tilde f_n) \leq \mathrm{S}(\tilde f)$; par ailleurs $\mathrm{S}(\tilde f) \leq \overline{\mathrm{Lim}}_{n}\ \mathrm{S}(\tilde f_n) = \operatorname*{Sup}_{n}\ \mathrm{S}(\tilde f_n)$.

7.24. Lemme : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$ on a $(\tilde f \wedge \tilde g)^2 \leq \tilde f\,\tilde g = (\tilde f \vee \tilde g)\,(\tilde f \wedge \tilde g)$.

Dém : Vrai dans $\mathcal{E}^+$, donc vrai dans $\big(\mathcal{L}^2\big)^+$.

7.25. Lemme : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{B}^+$ on a $\mathrm{S}\big(\tilde f\,\tilde g\big) = \mathrm{S}(\tilde f)\ \mathrm{S}(\tilde g)$.

Dém : Soit $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tel que $\tilde f \vee \tilde g \leq M$; alors on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{1} \wedge \big[n\,\big(\tilde f \wedge \tilde g\big)^2\big] \leq \mathbb{1} \wedge \big[n\,\big(\tilde f\,\tilde g\big)\big] \leq \mathbb{1} \wedge \big[n\,M\,\big(\tilde f \wedge \tilde g\big)\big]$;

donc quand $n \to +\infty$ on obtient $\mathrm{S}\big[\big(\tilde f \wedge \tilde g\big)^2\big] \leq \mathrm{S}\big(\tilde f\,\tilde g\big) \leq \mathrm{S}\big(\tilde f \wedge \tilde g\big)$;

or on a $\mathrm{S}\big[\big(\tilde f \wedge \tilde g\big)^2\big] = \mathrm{S}\big(\tilde f \wedge \tilde g\big) = \mathrm{S}(\tilde f)\ \mathrm{S}(\tilde g)$, donc $\mathrm{S}\big(\tilde f\,\tilde g\big) = \mathrm{S}(\tilde f)\ \mathrm{S}(\tilde g)$.

7.26. Théorème : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{L}^2$ on a $\boxed{\mathrm{S}\big(\tilde f\,\tilde g\big) = \mathrm{S}(\tilde f)\ \mathrm{S}(\tilde g)}$.

Dém : Supposons d'abord $\tilde f, \tilde g \in \big(\mathcal{L}^2\big)^+$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \tilde f_n = n \wedge \tilde f \in \mathcal{B}^+$ et $\tilde g_n = n \wedge \tilde g \in \mathcal{B}^+$; on a $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{S}\big(\tilde f_n\,\tilde g_n\big) = \mathrm{S}(\tilde f_n)\ \mathrm{S}(\tilde g_n)$; or on sait que $\tilde f_n \overset{2}{\to} \tilde f$, $\tilde g_n \overset{2}{\to} \tilde g$ et donc $\tilde f_n\,\tilde g_n \overset{1}{\to} \tilde f\,\tilde g$; de plus ces trois suites sont croissantes, donc $\mathrm{S}\big(\tilde f\,\tilde g\big) = \mathrm{S}(\tilde f)\ \mathrm{S}(\tilde g)$.

Soient alors $\tilde f\,,\ \tilde g \in \mathcal{L}^2$; on a $\mathrm{S}\big(\tilde f\,\tilde g\big) = \mathrm{S}\big(|\tilde f\,\tilde g|\big) = \mathrm{S}\big(|\tilde f\,|\big)\ \mathrm{S}\big(|\tilde g|\big) = \mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g)$.

7.27. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in (\mathcal{L}^1)^+$ on a $\boxed{\mathrm{S}\left(\sqrt{\tilde f}\right) = \mathrm{S}(\tilde f)}$.

<u>Dém</u> : $\sqrt{\tilde f} \in (\mathcal{L}^2)^+$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{S}\left[\left(\sqrt{\tilde f}\right)^2\right] = \left[\mathrm{S}\left(\sqrt{\tilde f}\right)\right]^2 = \mathrm{S}\left(\sqrt{\tilde f}\right)$.

7.28. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{B} \quad \forall\, \tilde g \in \mathcal{L}^1$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f\, \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\, \mathrm{S}(\tilde g)}$.

<u>Dém</u> : analogue à la précédente.

7.29. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{Inf}\left\{\sigma \in \mathcal{K} \,\|\, \sigma \tilde f = \tilde f\right\}$.

<u>Dém</u> : Posons $\tilde h = \mathrm{Inf}\left\{\sigma \in \mathcal{K} \,\|\, \sigma \tilde f = \tilde f\right\}$; on a $\mathrm{S}(\tilde f)\, \tilde f = \tilde f$, donc $\mathrm{S}(\tilde f) \geq \tilde h$; par ailleurs soit $\sigma \in \mathcal{K}$ tel que $\sigma \tilde f = \tilde f$; on a $\mathrm{S}(\tilde f) = \mathrm{S}(\sigma \tilde f) = \mathrm{S}(\sigma)\, \mathrm{S}(\tilde f)$ $= \sigma\, \mathrm{S}(\tilde f) \leq \sigma$; donc $\mathrm{S}(\tilde f) \leq \tilde h$.

7.30. <u>Théorème</u> : $\forall\, f \in \mathcal{R} \quad \forall\, \tilde g \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\mathrm{S}(\tilde f\, \tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\, \mathrm{S}(\tilde g)}$.

Pour démontrer le théorème on utilise les lemme suivants :

<u>*Lemme 1*</u> : $\forall\, \sigma \in \mathcal{EK} \quad \forall\, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathbb{1} \wedge (\sigma\, \tilde g) = \sigma \wedge \tilde g$.

<u>Dém</u> :

On a $\mathbb{1} \wedge (\sigma\, \tilde g) = (\sigma + \mathbb{1} - \sigma) \wedge (\sigma\, \tilde g) = \sigma \wedge (\sigma\, \tilde g) + (\mathbb{1} - \sigma) \wedge (\sigma\, \tilde g) = \sigma \wedge (\sigma\, \tilde g)$;
de même $\sigma \wedge \tilde g = \sigma \wedge [(\sigma + \mathbb{1} - \sigma)\, \tilde g] = \sigma \wedge (\sigma\, \tilde g) + \sigma \wedge [(\mathbb{1} - \sigma)\, \tilde g] = \sigma \wedge (\sigma\, \tilde g)$.

<u>*Lemme 2*</u> : $\forall\, \sigma \in \mathcal{EK} \quad \forall\, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(\sigma\, \tilde g) = \mathrm{S}(\sigma)\, \mathrm{S}(\tilde g)$.

<u>Dém</u> : $\mathrm{S}(\sigma\, \tilde g) = \mathrm{S}\left[\mathbb{1} \wedge (\sigma\, \tilde g)\right] = \mathrm{S}(\sigma \wedge \tilde g) = \mathrm{S}(\sigma)\, \mathrm{S}(\tilde g)$.

<u>*Lemme 3**</u> : $\forall\, f \in \mathcal{E}^+ \quad \forall\, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(f\, \tilde g) = \mathrm{S}(f)\, \mathrm{S}(\tilde g)$.

<u>*Lemme 4**</u> : $\forall\, f \in \mathcal{R}^+ \quad \forall\, \tilde g \in \mathcal{PM}^+$ on a $\mathrm{S}(f\, \tilde g) = \mathrm{S}(f)\, \mathrm{S}(\tilde g)$.

7.31. <u>Théorème</u> : <u>Inverse d'une fonctionnelle sommable</u>

Soient $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ et $c > 0$ tels que $\left|\tilde f\right| \geq c$; alors il existe un unique $\tilde g \in \mathcal{B}$ tel que $\tilde f\, \tilde g = 1$; on note $\boxed{\tilde g = \dfrac{1}{\tilde f}}$. On a de plus $\left|\dfrac{1}{\tilde f}\right| = \dfrac{1}{\left|\tilde f\right|} \leq \dfrac{1}{c}$ et $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\tilde f}\right) = 1$.

Démonstration : Montrons d'abord l'unicité ; soient $\tilde g_1\,,\,\tilde g_2 \in \mathcal{B}$ tels que $\tilde f\,\tilde g_1 = \tilde f\,\tilde g_2 = 1$; on en déduit $\tilde f\,(\tilde g_1 - \tilde g_2) = 0$, donc $\mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g_1 - \tilde g_2) = \mathrm{S}(\tilde g_1 - \tilde g_2) = 0$, donc $\tilde g_1 = \tilde g_2$.

Montrons maintenant l'existence. Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |f_n| \geq c$; on a $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \left|\dfrac{1}{f_n}\right| \leq 1$ et $\forall m\,,\,n \in \mathbb{N}\ \ \left\|\dfrac{1}{f_m} - \dfrac{1}{f_n}\right\|_1 = \left\|\dfrac{f_m - f_n}{f_m\,f_n}\right\|_1$ $\leq \dfrac{1}{c^2}\,\|f_m - f_n\|_1$; on en déduit que $\dfrac{1}{f_n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$, donc convergente vers un élément $\tilde g \in \mathcal{L}^1$; on a clairement $|\,\tilde g\,| \leq \dfrac{1}{c}$, donc $\tilde g \in \mathcal{B}$;

de plus on a bien $\tilde f\,\tilde g = {}^1\lim\limits_{n}\ \tilde f_n\,\dfrac{1}{f_n} = 1$.

Par ailleurs $\left|\tilde f\right|\,|\,\tilde g\,| = \left|\tilde f\,\tilde g\right| = 1$, donc par unicité $\dfrac{1}{\left|\tilde f\right|} = |\,\tilde g\,| = \left|\dfrac{1}{\tilde f}\right|$; enfin on a $1 = \mathrm{S}(\tilde f\,\tilde g) = \mathrm{S}(\tilde f)\,\mathrm{S}(\tilde g) = \mathrm{S}(\tilde g)$.

CHAPITRE VII

THEOREME DE RADON-NIKODYM

COMPLEMENTS

Le théorème de *Radon-Nikodym* affirme que l'espace des pseudo-mesures de support nul est un supplémentaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{PM}$.

§ 1. Théorème de Radon-Nikodym

1.1. Définition : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}^+$ $\boxed{\tilde f^\bullet = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (n \wedge \tilde f)}$.

$\tilde f^\bullet$ est bien défini par le théorème de convergence monotone car $n \wedge \tilde f$ est une suite croissante et dominée par $\tilde f$ dans $\mathcal{PM}^+$; de plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde f_n \leq n \in \mathcal{L}^1_+$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\tilde f_n \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$, donc $\tilde f^\bullet \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$.

1.2. Définition : On pose $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde f^\bullet = (\tilde f^+)^\bullet - (\tilde f^-)^\bullet} \in \mathcal{L}^1$.

$\tilde f^\bullet$ se nomme la partie fonctionnelle de $\tilde f$.

1.3. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\left|\tilde f^\bullet\right| = \left|\tilde f\right|^\bullet \leq \left|\tilde f\right|$.

Dém :

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\tilde f\right| \geq n \wedge \left|\tilde f\right| = n \wedge \tilde f^+ + n \wedge \tilde f^-$; donc $\left|\tilde f\right| \geq \left|\tilde f\right|^\bullet = (\tilde f^+)^\bullet + (\tilde f^-)^\bullet$; or $(\tilde f^+)^\bullet \wedge (\tilde f^-)^\bullet \leq \tilde f^+ \wedge \tilde f^- = 0$, donc $(\tilde f^+)^\bullet \wedge (\tilde f^-)^\bullet = 0$, donc $\left|\tilde f\right|^\bullet = \left|\tilde f^\bullet\right|$.

1.4. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1$ on a $\tilde f^\bullet = \tilde f$.

Dém : $(\tilde f^+)^\bullet = \tilde f^+$ et $(\tilde f^-)^\bullet = \tilde f^-$, donc $\tilde f^\bullet = (\tilde f^+)^\bullet - (\tilde f^-)^\bullet = \tilde f$.

1.5. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\mathrm{S}\,(\tilde f^\bullet) = \mathrm{S}\,(\tilde f)$.

Dém : Soit d'abord $\tilde f \in \mathcal{PM}^+$; on a $\tilde f^\bullet \leq \tilde f$, donc $\mathrm{S}\,(\tilde f^\bullet) \leq \mathrm{S}\,(\tilde f)$;

par ailleurs $\tilde f^\bullet \geq 1 \wedge \tilde f$, donc $\mathrm{S}\,(\tilde f^\bullet) \geq \mathrm{S}\,(1 \wedge \tilde f) = \mathrm{S}\,(\tilde f)$.

Soit alors $\tilde f \in \mathcal{PM}$; on a $\mathrm{S}\,(\tilde f^\bullet) = \mathrm{S}\left[(\tilde f^+)^\bullet - (\tilde f^-)^\bullet\right] = \mathrm{S}\left[(\tilde f^+)^\bullet + (\tilde f^-)^\bullet\right]$

$= \mathrm{S}\left[(\tilde f^+)^\bullet\right] + \mathrm{S}\left[(\tilde f^-)^\bullet\right] = \mathrm{S}\,(\tilde f^+) + \mathrm{S}\,(\tilde f^-) = \mathrm{S}\,(\tilde f)$.

1.6. Théorème : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}^+$ on a $\tilde f^\bullet = \operatorname{Sup}\left\{ \tilde g \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+ \,\|\, \tilde g \leq \tilde f \right\}$.

Dém :

On a $\tilde{f}^\bullet \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$ et $\tilde{f}^\bullet \leq \tilde{f}$, donc $\tilde{f}^\bullet \leq \operatorname{Sup}\left\{ \tilde{g} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+ \,\|\, \tilde{g} \leq \tilde{f} \right\}$; par ailleurs soit $\tilde{g} \in \mathcal{L}^1_+$ tel que $\tilde{g} \leq \tilde{f}$; alors $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad n \wedge \tilde{g} \leq n \wedge \tilde{f}$; on trouve donc $\tilde{g} = \tilde{g}^\bullet \leq \tilde{f}^\bullet$; donc $\operatorname{Sup}\left\{ \tilde{g} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+ \,\|\, \tilde{g} \leq \tilde{f} \right\} \leq \tilde{f}^\bullet$.

1.7. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\mathrm{S}\,(\tilde{f} - \tilde{f}^\bullet) = 0$.

Dém :

Soit d'abord $\tilde{f} \in \mathcal{PM}^+$; posons $\tilde{h} = \tilde{f} - \tilde{f}^\bullet \in \mathcal{PM}^+$ et supposons $\mathrm{S}\,(\tilde{h}) \neq 0$; on a donc aussi $\mathrm{S}\,(\mathbb{1} \wedge \tilde{h}) = \mathrm{S}\,(\tilde{h}) \neq 0$, donc $\mathbb{1} \wedge \tilde{h} \neq 0$; par ailleurs $\tilde{f}^\bullet + \mathbb{1} \wedge \tilde{h} \in \mathcal{L}^1_+$ et $\tilde{f}^\bullet + \mathbb{1} \wedge \tilde{h} \leq \tilde{f}^\bullet + \tilde{h} = \tilde{f}$, donc $\tilde{f}^\bullet + \mathbb{1} \wedge \tilde{h} \leq \tilde{f}^\bullet$; contradiction.
Soit alors $\tilde{f} \in \mathcal{PM}^+$; on a $\mathrm{S}\,(\tilde{f} - \tilde{f}^\bullet) = \mathrm{S}\left[\tilde{f}^+ - (\tilde{f}^+)^\bullet - \tilde{f}^- + (\tilde{f}^-)^\bullet\right]$
$= \mathrm{S}\left[\tilde{f}^+ - (\tilde{f}^+)^\bullet\right] + \mathrm{S}\left[\tilde{f}^- - (\tilde{f}^-)^\bullet\right] = 0$.

1.8. Définition :

$\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ est totalement singulière ssi $\mathrm{S}\,(\tilde{f}) = 0$, c-à-d ssi $\mathbb{1} \wedge \left|\tilde{f}\right| = 0$.

On note $\mathcal{PN} = \left\{ \tilde{f} \in \mathcal{PM} \,\|\, \tilde{f} \text{ totalement singulière} \right\}$.

1.9.* Théorème : $\mathcal{PN}$ est un sous-espace cohérent, $\boxed{\text{intégral}}$ et fermé de $\mathcal{PM}$; $\mathcal{PN}$ est donc un espace de Riesz-Banach.

1.10.* Théorème : $\mathcal{PN}$ est un module de Riesz sur $\mathcal{R}$.

1.11. Théorème : $\forall\, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\left[\, \tilde{f} \in \mathcal{PN} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}^\bullet = 0 \,\right]$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $n \wedge \tilde{f}^+ \leq n \wedge \left(n \tilde{f}^+\right) \leq n \wedge \left(n \left|\tilde{f}\right|\right) = n\left(\mathbb{1} \wedge \left|\tilde{f}\right|\right) = 0$; donc $(\tilde{f}^+)^\bullet = 0$; de même $(\tilde{f}^-)^\bullet = 0$; donc $\tilde{f}^\bullet = 0$.

b) $\Leftarrow$: $\mathbb{1} \wedge \left|\tilde{f}\right| = \mathbb{1} \wedge \left(\tilde{f}^+ + \tilde{f}^-\right) \leq \mathbb{1} \wedge \tilde{f}^+ + \mathbb{1} \wedge \tilde{f}^- \leq (\tilde{f}^+)^\bullet + (\tilde{f}^-)^\bullet = 0$.

1.12. Théorème : $\forall\, \tilde{g} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+ \quad \forall\, \tilde{h} \in \mathcal{PN}^+$ on a $\tilde{g} \wedge \tilde{h} = 0$.

Dém : On a $\tilde{g} \wedge \tilde{h} \in \left(\mathcal{L}^1\right)^+$ et $\tilde{g} \wedge \tilde{h} \leq \tilde{h}$, donc $\tilde{g} \wedge \tilde{h} \leq \tilde{h}^\bullet = 0$, donc $\tilde{g} \wedge \tilde{h} = 0$.

1.13. Théorème : $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{PN} = \{0\}$.

Dém : Si $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{S}\,(\tilde{f}) = 0$ on a $\tilde{f} = 0$.

1.14. Théorème de Radon-Nikodym : $\boxed{\mathcal{PM} = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{PN}}$.

Dém :

On a $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{PN} = \{0\}$; de plus si $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$, alors $\tilde{f} = \tilde{f}^\bullet + \tilde{f} - \tilde{f}^\bullet \in \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{PN}$.

Notation : On pose $\boxed{\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{PN}}$ et $\boxed{\mathcal{N}_D = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_D}$.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont les espaces des mesures et des mesures diffuses totalement singulières.

1.15.* Théorème :

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont des sous-espaces cohérents, $\boxed{\text{intégraux}}$ et fermés de $\mathcal{PM}$.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont des espaces de Riesz-Banach.

$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_D$ sont des modules de Riesz sur $\mathcal{W}$.

1.16.* Théorème de Radon-Nikodym : $\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{N}}$ et $\boxed{\mathcal{M}_D = \mathcal{L}^1 \bigoplus \mathcal{N}_D}$.

§ 2. Théorèmes divers

Nous donnons, entre autres résultats, des caractérisations remarquables des *fonctionnelles sommables* et des pseudo-mesures *totalement singulières*.

2.1. Théorème : Soient $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et $h \in \mathcal{E}^+$; alors on a $\boxed{\tilde{f}^+(h) \;=\; \sup\limits_{\substack{k \in \mathcal{E}^+ \\ k \leq h}} \tilde{f}(k)}$

Dém :

$$\tilde{f}^+(h) = \tfrac{1}{2}\left[\tilde{f}(h) + \left|\tilde{f}\right|(h)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\tilde{f}(h) + \sup_{\substack{k \in \mathcal{E} \\ |k| \leq h}} \tilde{f}(k)\right] = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E} \\ |k| \leq h}} \tilde{f}\left[\tfrac{1}{2}(h+k)\right] = \sup_{\substack{\ell \in \mathcal{E}^+ \\ \ell \leq h}} \tilde{f}(\ell).$$

2.2. Corollaire : Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ et $h \in \mathcal{E}^+$; alors on a

$$\boxed{\begin{aligned} (\tilde{f} \vee \tilde{g})(h) &= \sup_{\substack{h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+ \\ h_1 + h_2 = h}} \left[\tilde{f}(h_1) + \tilde{g}(h_2)\right] \\ (\tilde{f} \wedge \tilde{g})(h) &= \inf_{\substack{h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+ \\ h_1 + h_2 = h}} \left[\tilde{f}(h_1) + \tilde{g}(h_2)\right] \end{aligned}}$$

Dém : $(\tilde{f} \vee \tilde{g})(h) = \tilde{f}(h) + (\tilde{g} - \tilde{f})^+(h) = \tilde{f}(h) + \sup\limits_{\substack{k \in \mathcal{E}^+ \\ k \leq h}} \left[\tilde{g}(k) - \tilde{f}(k)\right]$

$$= \sup_{\substack{k \in \mathcal{E}^+ \\ k \leq h}} \left[\tilde{f}(h-k) + \tilde{g}(k)\right] = \sup_{\substack{h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+ \\ h_1 + h_2 = h}} \left[\tilde{f}(h_1) + \tilde{g}(h_2)\right].$$

2.3. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\left\|\tilde f^{+}\right\|_{\star} = \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \tilde f(\sigma)}$.

<u>Dém</u> : On a $\left\|\tilde f^{+}\right\|_{\star} = \tilde f^{+}(\mathbb{1}) = \sup\limits_{\substack{h \in \mathcal{E}^{+} \\ h \le 1}} \tilde f(h) \ge \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \tilde f(\sigma)$; par ailleurs soit $\varepsilon > 0$ et $h \in \mathcal{E}^{+}$ tel que $h \le 1$ et $\tilde f(h) \ge \tilde f^{+}(\mathbb{1}) - \varepsilon$; on a $h = \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$ où les I_r sont des intervalles formant une <u>partition</u> de $[a\,,b]$ et où $\forall\, r \in [[0\,,\, n]]$ $\alpha_r \in [\,0\,,\,1]$;

posons $\forall\, r \in [[1\,,\, n]]$ $\gamma_r = 0$ si $\tilde f(1_{\mathrm{I}_r}) \le 0$ et $\gamma_r = 1$ si $\tilde f(1_{\mathrm{I}_r}) \ge 0$; posons de plus $\sigma = \sum\limits_{r=1}^{n} \gamma_r\, 1_{\mathrm{I}_r}$; on a $\sigma \in \mathcal{EK}$ et $\tilde f(\sigma) \ge \tilde f(h) \ge \tilde f^{+}(\mathbb{1}) - \varepsilon$;

donc $\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \tilde f(\sigma) \ge \tilde f^{+}(\mathbb{1}) - \varepsilon$; comme ε est arbitraire on a $\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \tilde f(\sigma) \ge \tilde f^{+}(\mathbb{1})$.

<u>Notation</u> : On note $\mathcal{EU} = \big\{ h \in \mathcal{E} \,\big\|\, |h| = 1 \big\} = 1 - 2\,\mathcal{EK}$.

2.4. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\left\|\tilde f\right\|_{\star} = \sup\limits_{h \in \mathcal{EU}} \tilde f(h) = \sup\limits_{h \in \mathcal{EU}} \left|\tilde f(h)\right|}$.

<u>Dém</u> : On a $\left|\tilde f\right| = \tilde f + 2\,\tilde f^{-} = \tilde f + 2\,(-\tilde f)^{+}$, donc $\left\|\tilde f\right\|_{\star} = \left|\tilde f\right|(\mathbb{1})$ $= \tilde f(\mathbb{1}) + 2\,(-\tilde f)^{+}(\mathbb{1}) = \tilde f(\mathbb{1}) + 2 \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} (-\tilde f)(\sigma) = \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \tilde f(\mathbb{1} - 2\,\sigma) = \sup\limits_{h \in \mathcal{EU}} \tilde f(h)$.

2.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f^{+} = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \sigma \tilde f}$.

<u>Dém</u> :

$\forall\, \sigma \in \mathcal{EK}$ on a $\sigma \tilde f = \sigma \tilde f^{+} - \sigma \tilde f^{-} \le \sigma \tilde f^{+} \le \tilde f^{+}$, donc $\operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \sigma \tilde f \le \tilde f^{+}$;

par ailleurs soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\tilde f(\sigma_n) \to \left\|\tilde f^{+}\right\|_{\star}$; alors on a

$\left\|\tilde f^{+} - \sigma_n \tilde f\right\|_{\star} = \big(\tilde f^{+} - \sigma_n \tilde f\big)(\mathbb{1}) = \tilde f^{+}(\mathbb{1}) - \sigma_n \tilde f(\mathbb{1}) = \left\|\tilde f^{+}\right\|_{\star} - \tilde f(\sigma_n) \to 0$;

donc $\sigma_n \tilde f \overset{\star}{\to} \tilde f^{+}$; or on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \sigma \tilde f \ge \sigma_n \tilde f$, donc $\operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \sigma \tilde f \ge \tilde f^{+}$.

2.6. <u>Corollaire</u> : $\forall\, \tilde f, \tilde g \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde f \vee \tilde g = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \big[\sigma \tilde f + (1 - \sigma)\,\tilde g\big]}$

et $\boxed{\tilde f \wedge \tilde g = \operatorname*{Inf}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \big[\sigma \tilde f + (1 - \sigma)\,\tilde g\big]}$.

<u>Dém</u> :

$$\tilde f \vee \tilde g = \tilde f + (\tilde g - \tilde f)^{+} = \tilde f + \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \sigma\,(\tilde g - \tilde f) = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \big(\tilde f + \sigma \tilde g - \sigma \tilde f\big) = \operatorname*{Sup}\limits_{\sigma \in \mathcal{EK}} \big[\sigma \tilde f + (1 - \sigma)\,\tilde g\big]$$

2.7. Corollaire : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\,|\tilde f\,| = \operatorname*{Sup}_{h \in \mathcal{EU}} h\tilde f\,}$.

Dém :

$$|\tilde f\,| = \tilde f + 2\,\tilde f^- = \tilde f + 2\,(-\tilde f)^+ = \tilde f + 2 \operatorname*{Sup}_{\sigma \in \mathcal{EK}} (-\,\sigma \tilde f) = \operatorname*{Sup}_{\sigma \in \mathcal{EK}} (1 - 2\,\sigma)\tilde f = \operatorname*{Sup}_{h \in \mathcal{EU}} h\tilde f .$$

2.8. Théorème : Caractérisation des éléments de $\mathcal{PN}$

Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{PN}$ ss'il existe une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \quad \text{et} \quad \sigma_n \tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f}.$$

Dém :

a) $\Rightarrow$: On a $0 = \mathbb{1} \wedge \tilde f^+ = \operatorname*{Inf}_{\sigma \in \mathcal{EK}} \left[\sigma + (1-\sigma)\,\tilde f^+\right]$; il existe donc une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n + (1-\sigma_n)\,\tilde f^+ \xrightarrow{\star} 0$; on a donc aussi $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $(1-\sigma_n)\,\tilde f^+ \xrightarrow{\star} 0$, c-à-d $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $\sigma_n \tilde f^+ \xrightarrow{\star} \tilde f^+$; de même il existe une suite $\tau_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\tau_n \xrightarrow{1} 0$ et $\tau_n \tilde f^- \xrightarrow{\star} \tilde f^-$; posons $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\chi_n = \sigma_n \vee \tau_n$; on a $\chi_n \xrightarrow{1} 0$; de plus $\sigma_n \tilde f^+ \leq \chi_n \tilde f^+ \leq \tilde f^+$, donc $\chi_n \tilde f^+ \xrightarrow{\star} \tilde f^+$; de même $\chi_n \tilde f^- \xrightarrow{\star} \tilde f^-$, donc $\chi_n \tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; d'après le théorème de Radon-Nikodym il existe $\tilde g \in \mathcal{L}^1$ et $\tilde h \in \mathcal{PN}$ tels que $\tilde f = \tilde g + \tilde h$; soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $\sigma_n \tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f$; on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n \tilde f = \sigma_n \tilde g + \sigma_n \tilde h$; quand $n \to +\infty$ on obtient donc $\sigma_n \tilde h \xrightarrow{\star} \tilde f$; or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n \tilde h \in \mathcal{PN}$, donc $\tilde f \in \mathcal{PN}$.

2.9. Corollaire :

Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{PN}$ ss'il existe une suite $\tau_n \in \mathcal{EK}$ telle que

$$\boxed{\tau_n \xrightarrow{1} \mathbb{1} \quad \text{et} \quad |\tilde f\,|\,(\tau_n) \to 0}.$$

Dém : $\sigma_n \tilde f \xrightarrow{\star} \tilde f \iff (1-\sigma_n)\,\tilde f \xrightarrow{\star} 0$

$$\begin{aligned} &\iff (1-\sigma_n)\,|\tilde f\,| \xrightarrow{\star} 0 \\ &\iff \left[(1-\sigma_n)\,|\tilde f\,|\right](\mathbb{1}) \to 0 \\ &\iff |\tilde f\,|\,(1-\sigma_n) \to 0. \end{aligned}$$

2.10. Théorème : Caractérisation des éléments de $\mathcal{L}^1$

Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sigma_n \tilde f \xrightarrow{\star} 0}\,.$$

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$; soit $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{E}$ tel que $\left\| \tilde f - g \right\|_1 \leq \varepsilon$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N \quad \|\sigma_n\, g\|_1 \leq \|g\|\,\|\sigma_n\|_1 \leq \varepsilon$; on a donc $\forall\, n \geq N \quad \left\|\sigma_n \tilde f\right\|_1 \leq \|\sigma_n\, g\|_1 + \left\|\sigma_n (\tilde f - g)\right\|_1 \leq \varepsilon + \left\| \tilde f - g \right\|_1 \leq 2\,\varepsilon$; donc $\sigma_n \tilde f \xrightarrow{1} 0$.

b) $\Leftarrow$: Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; d'après le théorème de Radon-Nikodym il existe $\tilde g \in \mathcal{L}^1$ et $\tilde h \in \mathcal{PN}$ tels que $\tilde f = \tilde g + \tilde h$; il existe de plus une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $\sigma_n \tilde h \xrightarrow{\star} \tilde h$; on a alors $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n \tilde f = \sigma_n \tilde g + \sigma_n \tilde h$; quand $n \to +\infty$ on obtient donc $0 = \tilde h$, donc $\tilde f = \tilde g \in \mathcal{L}^1$.

2.11. Corollaire : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde f \in \mathcal{L}^1$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\;\Rightarrow\;\; |\tilde f|\,(\sigma_n) \to 0}\,.$$

Dém : $\sigma_n \tilde f \xrightarrow{\star} 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma_n \,|\tilde f|\, \xrightarrow{\star} 0$

$$\Leftrightarrow\; \left[\,\sigma_n\,|\tilde f|\,\right](\mathbb{1}) \to 0$$

$$\Leftrightarrow\; |\tilde f|\,(\sigma_n) \to 0\,.$$

2.12. Lemme : Soit $\tilde f \in \mathcal{PM}$; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ $\left[\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; |\tilde f|\,(\sigma_n) \to 0\right]$

(2) Pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ $\left[\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \;\Rightarrow\; \tilde f\,(\sigma_n) \to 0\right]$.

Dém : (1) $\Rightarrow$ (2) est évident ; montrons (2) $\Rightarrow$ (1).

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{EU}$ tel que $\left\|\tilde f\right\|_\star \leq \tilde f\,(h) + \varepsilon$; soit une suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ telle que $\sigma_n \xrightarrow{1} 0$; on a $|\tilde f|\,(\sigma_n) + |\tilde f|\,(1 - \sigma_n) = |\tilde f|\,(\mathbb{1}) = \|\tilde f\|_\star \leq \tilde f\,(h) + \varepsilon$ $= \tilde f\,(h\,\sigma_n) + \tilde f\left[h\,(1-\sigma_n)\right] + \varepsilon \leq \tilde f\,(h\,\sigma_n) + |\tilde f|\,(1-\sigma_n) + \varepsilon$;

donc $|\tilde f|\,(\sigma_n) \leq \tilde f\,(h\,\sigma_n) + \varepsilon = \tilde f\,(h^+\sigma_n) + \tilde f\,(h^-\sigma_n) + \varepsilon$; or $h^+, h^- \in \mathcal{EK}$; de plus $h^+\sigma_n \xrightarrow{1} 0$ et $h^-\sigma_n \xrightarrow{1} 0$, donc $\tilde f\,(h^+\sigma_n) \to 0$ et $\tilde f\,(h^-\sigma_n) \to 0$; donc $\overline{\lim_n}\; |\tilde f|\,(\sigma_n) \leq \varepsilon$; donc $|\tilde f|\,(\sigma_n) \to 0$.

2.13.* Corollaire : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{1} 0 \ \Rightarrow \ \tilde{f}(\sigma_n) \to 0}.$$

Remarque : Ce dernier corollaire est à contraster avec le Théorème VI 6.13, que nous rappelons ci-dessous :

Théorème VI 6.13 : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ ssi pour toute suite $\sigma_n \in \mathcal{EK}$ on a

$$\boxed{\sigma_n \xrightarrow{\circ} 0 \ \Rightarrow \ \tilde{f}(\sigma_n) \to 0}.$$

2.14.* Corollaire : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \sigma \in \mathcal{EK} \quad \boxed{\|\sigma\|_1 \leq \delta \ \Rightarrow \ \big|\tilde{f}(\sigma)\big| \leq \varepsilon}.$$

§ 3. Mesures atomiques

3.1. Définition : $\forall c \in [a,b]$ on note $\delta_c : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : h \mapsto h(c)$.
δ_c s'appelle la mesure de Dirac en c.

3.2.* Théorème : $\forall c \in [a,b]$ on a $\boxed{\delta_c \in \mathcal{N}}$ et $\boxed{\delta_c \notin \mathcal{N}_D}$.

3.3. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ est une mesure atomique ssi $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [a,b]} \gamma_c \, \delta_c$, avec $\forall c \in [a,b]$ $\gamma_c \in \mathbb{R}$ et $\sum\limits_{c \in [a,b]} |\gamma_c| < +\infty$.

L'ensemble $\big\{ c \in [a,b] \,\|\, \gamma_c \neq 0 \big\}$ est donc fini ou dénombrable.

On note $\mathcal{A} = \big\{ \tilde{f} \in \mathcal{M} \,\big\|\, \tilde{f} \text{ atomique} \big\}$.

3.4. Définition : On note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{F}$ telles que $\sum\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| < +\infty$; on munit $\mathcal{H}$ de la norme $\|f\|_{\mathcal{H}} = \sum\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

3.5.* Théorème : $\big(\mathcal{H}, |\ |, \|\ \|_{\mathcal{H}}\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

3.6. Théorème : $\mathcal{A}$ est un sous-espace cohérent, $\boxed{\text{intégral}}$ et fermé de $\mathcal{M}$.

Dém :

a) $\mathcal{A}$ est cohérent

On a $\forall c \in [a,b]$ $\delta_c \wedge \delta_c = \delta_c$ et $\forall c_1, c_2 \in [a,b]$ avec $c_1 \neq c_2$ $\delta_{c_1} \wedge \delta_{c_2} = 0$.

b) $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{M}$

Les espaces de Riesz-Banach $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ sont canoniquement isométriques ; or $\mathcal{H}$ est complet, donc $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{M}$.

c) $\mathcal{A}$ est intégral dans $\mathcal{M}$

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{A}^+$ et $\tilde{g} \in \mathcal{M}^+$ tel que $\tilde{g} \leq \tilde{f}$; il faut montrer $\tilde{g} \in \mathcal{A}^+$; notons $\mathcal{A}_\phi$ l'espace des combinaisons linéaires *finies* des δ_c, avec $c \in [a,b]$; on suppose, ce qui est évident, que le théorème est vrai si $\tilde{f} \in \left(\mathcal{A}_\phi\right)^+$.

On peut écrire $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [a,b]} \gamma_c\, \delta_c$, avec $\forall\, c \in [a,b]\ \ \gamma_c \in \mathbb{R}^+$ et $\sum\limits_{c \in [a,b]} \gamma_c < +\infty$;

posons $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ \tilde{f}_n = \sum\limits_{\substack{c \in [a,b] \\ \gamma_c \geq 1/n}} \gamma_c\, \delta_c$; on a $\tilde{f}_n \wedge (\tilde{f} - \tilde{f}_n) = 0$, donc

$\tilde{g} = \tilde{g} \wedge \tilde{f}_n + \tilde{g} \wedge (\tilde{f} - \tilde{f}_n)$; or $\tilde{g} \wedge \tilde{f}_n \leq \tilde{f}_n \in \left(\mathcal{A}_\phi\right)^+$, donc $\tilde{g} \wedge \tilde{f}_n \in \left(\mathcal{A}_\phi\right)^+$;

par ailleurs $\tilde{f}_n \overset{\star}{\to} \tilde{f}$, donc $\tilde{g} \wedge \tilde{f}_n \overset{\star}{\to} \tilde{g}$; or $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{M}$, donc $\tilde{g} \in \mathcal{A}^+$.

3.7. Théorème : $\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}_D \bigoplus \mathcal{A}}$ et $\boxed{\mathcal{N} = \mathcal{N}_D \bigoplus \mathcal{A}}$.

Dém : Démontrons la première égalité, la seconde s'en déduisant simplement.

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}$; on pose $\mathsf{E}^+ = \left\{c \in [a,b] \,\|\, \tilde{f}\left(\mathbb{1}_{\{c\}}\right) > 0\right\}$,

$\mathsf{E}^- = \left\{c \in [a,b] \,\|\, \tilde{f}\left(\mathbb{1}_{\{c\}}\right) < 0\right\}$ et $\mathsf{E} = \mathsf{E}^+ \cup \mathsf{E}^-$;

soit $h = \sum\limits_i \mathbb{1}_{\{c_i\}} \in \mathcal{E}^+$, où les c_i constituent une partie finie de E^+ ;

on a $0 < \tilde{f}(h) = \sum\limits_i \tilde{f}\left(\mathbb{1}_{\{c_i\}}\right) \leq \left\|\tilde{f}\right\|_\star \|h\| = \left\|\tilde{f}\right\|_\star$; donc $\sum\limits_{c \in \mathsf{E}^+} \tilde{f}\left(\mathbb{1}_{\{c\}}\right) \leq \left\|\tilde{f}\right\|_\star$;

idem pour E^- ; donc $\tilde{g} = \sum\limits_{c \in \mathsf{E}} \tilde{f}\left(\mathbb{1}_{\{c\}}\right) \delta_c \in \mathcal{A}$; de plus il est clair que $\tilde{f} - \tilde{g} \in \mathcal{M}_D$.

Compte tenu de leur forme, les mesures atomiques peuvent a priori s'appliquer à *n'importe quelle* fonction définie sur [a,b] ; dès lors toute fonction peut être considérée comme “mesurable” pour les mesures atomiques. Qu'en est-il de la sommabilité ?

3.8. Définition : $g \in \hat{\mathcal{F}}$ est sommable pour $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [a,b]} \gamma_c\, \delta_c \in \mathcal{A}$ ssi

$$\boxed{\left|\tilde{f}\right|\left(|g|\right) = \sum_{c \in [a,b]} |\gamma_c|\, |g(c)| < +\infty}\,.$$

3.9. Théorème : $g \in \hat{\mathcal{F}}$ est sommable pour toutes les mesures atomiques ssi g est borné, c-à-d ssi $g \in \mathcal{F}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Supposons $g \in \hat{\mathcal{F}}$ non borné ; il existe dès lors une suite $c_n \in [a, b]$ telle que $|g(c_n)| \to +\infty$; on peut supposer $g \geq 0$, et aussi $\forall n \in \mathbb{N}\ \ g(c_n) \geq n^2$, en prenant au besoin une sous-suite de c_n ; définissons alors la mesure atomique positive $\tilde{f} = \sum_n \dfrac{1}{g(c_n)}\, \delta_{c_n}$; on a bien $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ car $\sum_n \dfrac{1}{g(c_n)} \leq \sum_n \dfrac{1}{n^2} < +\infty$; mais par ailleurs $\tilde{f}(g) = \sum_n \dfrac{1}{g(c_n)}\, g(c_n) = \sum_n 1 = +\infty$; donc g n'est pas sommable pour $\tilde{f}$.

b) $\Leftarrow$: Trivial.

§ 4. Pseudo-mesures atomiques

4.10. Définition : $\forall c \in [a, b]$ on note $\delta_{c^+} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : h \mapsto \lim\limits_{x \to c^+} h(c) \quad (c \neq b)$

et $\delta_{c^-} : \mathcal{E} \to \mathbb{R} : h \mapsto \lim\limits_{x \to c^-} h(c) \quad (c \neq a)$.

δ_{c^+} et δ_{c^-} sont les pseudo-mesures droite et gauche de Dirac en c.

4.11.* Théorème : $\forall c \in [a, b]$ on a $\boxed{\delta_{c^+}, \delta_{c^-} \in \mathcal{PN}}$ et $\boxed{\delta_{c^+}, \delta_{c^-} \notin \mathcal{N}}$.

4.12. Définition :

$\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ est une pseudo-mesure atomique droite ssi $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [a,b]} \gamma_c\, \delta_{c^+}$

atomique gauche ssi $\tilde{f} = \sum\limits_{c \in [a,b]} \gamma_c\, \delta_{c^-}$,

avec les mêmes conditions que pour les mesures atomiques.

On note $\mathcal{A}_+ = \left\{ \tilde{f} \in \mathcal{PM} \,\|\, \tilde{f} \text{ atomique droite} \right\}$

et $\mathcal{A}_- = \left\{ \tilde{f} \in \mathcal{PM} \,\|\, \tilde{f} \text{ atomique gauche} \right\}$;

de plus on pose $\boxed{\mathcal{PA} = \mathcal{A} \bigoplus \mathcal{A}_+ \bigoplus \mathcal{A}_-}$;

les éléments de $\mathcal{PA}$ sont appelés les pseudo-mesures atomiques.

4.13.* Théorème :

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ sont des espaces de Riesz-Banach canoniquement isomorphes.

4.14.* Théorème :

$\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ sont des sous-espaces cohérents, $\boxed{\text{intégraux}}$ et fermés de $\mathcal{PM}$.

4.15.* Théorème : $\boxed{\mathcal{PM} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{A}_+ \bigoplus \mathcal{A}_- = \mathcal{M}_D \bigoplus \mathcal{PA}}$

$$\boxed{\mathcal{PN} = \mathcal{N} \bigoplus \mathcal{A}_+ \bigoplus \mathcal{A}_- = \mathcal{N}_D \bigoplus \mathcal{PA}}\,.$$

Les deux premières égalités montrent que les pseudo-mesures sont en fait des mesures, et même des mesures diffuses "à des pseudo-mesures atomiques près".

§ 5. Mesures de Radon sur [a,b]

Les *mesures de Radon* constituent la définition classique, bien que malcommode, des mesures. Nous montrerons que l'espace des mesures de Radon est effectivement isométrique à $\mathcal{M}$.

5.1. Définition : **Une mesure de Radon sur [a,b] est un élément du N-dual de l'espace normé** $\big(\mathcal{C}, \|\ \|\big)$.

Ou encore : **Une mesure de Radon sur [a,b] est une forme linéaire** $\tilde{\mu}$ **sur** $\mathcal{C}$ **vérifiant la propriété** : $\boxed{\textbf{il existe } \mathbf{M > 0} \textbf{ tel que } \forall\, \mathbf{g} \in \mathcal{C} \ \ |\tilde{\mu}(\mathbf{g})| \leq \mathbf{M}\,\|\mathbf{g}\|}$.

On note $\mathcal{M}_\odot$ l'espace vectoriel des mesures de Radon.

Autrement dit $\boxed{\mathcal{M}_\odot \text{ est le N-dual de l'espace normé } \big(\mathcal{C}, \|\ \|\big)}$.

5.2.* Théorème : $\mathcal{M}_\odot$ constitue un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_\star$, duale de la norme $\|\ \|$, définie par $\boxed{\|\tilde{\mu}\|_\star = \sup\limits_{g \in \mathcal{C},\, \|g\|=1} |\tilde{\mu}(g)| = \sup\limits_{g \in \mathcal{C},\, \|g\|=1} \tilde{\mu}(g)}$.

On peut appliquer intégralement la théorie des Chapitres I–IV à $\mathcal{M}_\odot$ en lieu et place de $\mathcal{PM}$; nous mentionnons ci-dessous les théorèmes essentiels ainsi obtenus (les numéros de ces théorèmes sont suivis d'un $\odot$) ; ceux-ci vont nous permettre d'établir l'existence d'une isométrie bijective canonique entre $\mathcal{M}_\odot$ et $\mathcal{M}$.

5.3. $\odot$ Théorème : $\big(\mathcal{M}_\odot, |\ \ |, \|\ \|_\star\big)$ est un espace de Riesz-Banach.

5.4. $\odot$ Théorème de Lebesgue dans $\mathcal{C}$

Soit une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $f_n \xrightarrow{\text{b}} f \in \mathcal{C}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a $f_n\, \tilde{\mu} \xrightarrow{\times} f\, \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) \to \tilde{\mu}(f)$.

5.5. Définition : $f \in \mathcal{F}$ est une fonction de Baire ss'il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$.

On note $\mathcal{BA} = \{ f \in \mathcal{F} \,\|\, f \text{ fonction de Baire} \} \supset \mathcal{C}$.

5.6. $\odot$ Théorème : $\mathcal{BA}$ est une algèbre de Riesz-Banach pour la convergence uniforme.

5.7. Corollaire : $\boxed{\mathcal{R} \subset \mathcal{BA} \subset \mathcal{PR}}$.

Dém : Il est facile de voir que $\mathcal{E} \subset \mathcal{BA}$; or $\mathcal{BA}$ est fermé pour la convergence uniforme, donc $\mathcal{R} \subset \mathcal{BA}$.

5.8. $\odot$ Théorème d'extension : Soit une suite $f_n \in \mathcal{C}$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f \in \mathcal{BA}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot \;\; f_n\, \tilde{\mu}$ converge finement dans $\mathcal{M}_\odot$ vers une limite qui ne dépend que de f (et non de la suite f_n).

5.9. Définition : $\forall\, f \in \mathcal{BA} \;\; \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ nous pouvons donc définir $f\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ de la manière suivante : $\boxed{f\, \tilde{\mu} = \operatorname*{Lim}_n \left(f_n\, \tilde{\mu} \right)}$ où f_n est n'importe quelle suite dans $\mathcal{C}$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$.

5.10. Définition : Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ s'étend canoniquement à $\mathcal{BA}$ en posant

$$\boxed{\forall\, f \in \mathcal{BA} \quad \tilde{\mu}\,(f) = (f\, \tilde{\mu})\,(\mathbb{1})}.$$

5.11. $\odot$ Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{BA} \;\; \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a $\boxed{\tilde{\mu}\,(f) = \lim_n \tilde{\mu}\,(f_n)}$, où f_n est n'importe quelle suite dans $\mathcal{C}$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f$.

5.12. $\odot$ Théorème : $\forall\, f \in \mathcal{BA} \;\; \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a
1) $|\, f\, \tilde{\mu}\,| = |\, f\,|\,|\, \tilde{\mu}\,|$
2) $|\, \tilde{\mu}\,(f)\,| \le |\, \tilde{\mu}\,|\,(|f|) \le \|\, \tilde{\mu}\,\|_\star \,\|\, f\,\|$
3) $\|\, f\, \tilde{\mu}\,\|_\star \le \|\, f\,\|\, \|\, \tilde{\mu}\,\|_\star$

5.13. Lemme : Soit F un *intervalle* fermé de $[\mathrm{a,b}]$; alors $\mathbb{1}_{\mathrm{F}} \in (\mathcal{C}^+)_\downarrow$.

Dém : Il suffit de faire un dessin !

5.14. Théorème : Soit F un fermé de $[\mathrm{a,b}]$; alors $\boxed{\mathbb{1}_{\mathrm{F}} \in (\mathcal{C}^+)_\downarrow}$.

Dém : Même démonstration qu'au Théorème III 9.

5.15. <u>Théorème</u> : $\boxed{(\mathcal{C}^+)_\downarrow = \mathcal{S} \subset \not\mathcal{B}\mathcal{A}^+}$.

<u>Dém</u> : Même démonstration qu'au Théorème III 10 ; de plus par définition de $\not\mathcal{B}\mathcal{A}$ on a évidemment $(\mathcal{C}^+)_\downarrow \subset \not\mathcal{B}\mathcal{A}^+$.

5.16. $\odot$ <u>Lemme d'approximation dans $\not\mathcal{B}\mathcal{A}^+$</u>

$\forall\, f \in \not\mathcal{B}\mathcal{A}^+ \ \ \forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot^+ \ \ \forall\, \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $\boxed{g \le f \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}\,(f-g) \le \varepsilon}$.

5.17. $\odot$ <u>Théorème de Lebesgue dans $\not\mathcal{B}\mathcal{A}$</u>

Soit une suite $f_n \in \not\mathcal{B}\mathcal{A}$ telle que $f_n \overset{\mathrm{b}}{\to} f \in \not\mathcal{B}\mathcal{A}$; alors $\forall\, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}_\odot$ on a $f_n\,\tilde{\mu} \overset{\times}{\to} f\,\tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}\,(f_n) \to \tilde{\mu}\,(f)$.

5.18. $\odot$ <u>Théorème d'isomorphisme</u>

L'application $\phi \,:\, \mathcal{M}_\odot \to \mathcal{M} \,:\, \tilde{\mu} \mapsto \tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}}$ est une isométrie de Riesz-Banach.
L'application $\psi \,:\, \mathcal{M} \to \mathcal{M}_\odot \,:\, \tilde{\mu} \mapsto \tilde{\mu}\,|_{\mathcal{C}}$ est l'isométrie réciproque de ϕ.
<u>On peut donc identifier $\mathcal{M}_\odot$ avec $\mathcal{M}$.</u>

<u>Dém</u> : On a clairement $\tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}} \in \mathcal{PM}$; de plus on montre facilement que $\big\|\,\tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}}\,\big\|_\star = \|\,\tilde{\mu}\,\|_\star$, donc aussi $\big|\,\tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}}\big| = |\,\tilde{\mu}\,|$. Par ailleurs soit $c \in [\,a\,,b\,]$; on a $1_{]\,\gamma\,,\,c\,[} \overset{\mathrm{b}}{\to} 0$ quand $\gamma \to c$; donc $\tilde{\mu}\,\big(1_{]\,\gamma\,,\,c\,[}\big) \to \tilde{\mu}\,(0) = 0$; donc $\tilde{\mu}\,|_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}$.

<u>Récapitulatif</u> $\big($Seul $\mathcal{FO}$ reste encore à définir ; ce sera l'objet du Chapitre XI$\big)$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \widehat{\mathcal{W}} & & & & & & \mathcal{FO} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \cup & & & & & & \cup & & & & & & \\
\mathcal{E} & \subset & \mathcal{R} & \subset & \not\mathcal{B}\mathcal{A} & \subset & \mathcal{PR} & \subset & \mathcal{W} & \underset{surj.}{\twoheadrightarrow} & \not\mathcal{B} & \subset & \mathcal{L}^2 & \subset & \mathcal{L}^1 & \subset & \mathcal{M}_D & \subset & \mathcal{M} & \subset & \mathcal{PM} \\
 & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & & & & & \cup & & \cup & & \cup \\
 & & \mathcal{C} & & \mathcal{S} & & & & \mathcal{Z} & & \mathcal{K} & & & & & & \mathcal{N}_D & \subset & \mathcal{N} & \subset & \mathcal{PN} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cup & & \cup \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathcal{A} & \subset & \mathcal{PA}
\end{array}
$$

CHAPITRE VIII

PRIMITIVES, DIFFERENTIELLES, DERIVEES

Nous généralisons le concept de *primitive* à toute pseudo-mesure diffuse. Inversément nous définissons la *différentielle* de toute fonction continue à variation bornée. On peut ainsi étendre le domaine de validité de la plupart des formules classiques du calcul différentiel et intégral.

§ 1. Fonctions continues à variation bornée

1.1. Définition : Une fonction $F \in \mathcal{F}$ est dite à variation bornée ss'il existe $M > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$ on ait

$$\boxed{\sum_k |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq M}\,.$$

La valeur minimum de M s'appelle la variation totale de F et se note $V(F)$.

On note $\mathcal{CV}$ l'algèbre des fonctions $[a, b] \to \mathbb{R}$ continues et à variation bornée.
Les fonctions lipschitziennes sont dans $\mathcal{CV}$.

1.2.* Théorème : $\forall F \in \mathcal{CV}$ on a $V\big(|F|\big) \leq V(F)$; on en déduit que $\big(\mathcal{CV}, |\ |\big)$ est une algèbre de Riesz.

1.3. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}_D$; on pose $F_\circ : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \tilde{f}(1_{[a,x]})$.
Toute fonction de la forme $F = F_\circ + c$ $(c \in \mathbb{R})$ s'appelle une primitive de $\tilde{f}$.

1.4. Théorème : $F \in \mathcal{CV}$ et $V(F) = \|\tilde{f}\|_\star$

Dém : $V(F) = \sup\limits_{h \in \mathcal{EU}} \tilde{f}(h) = \|\tilde{f}\|_\star$.

1.5. Définition : Réciproquement $\forall F \in \mathcal{CV}$ on définit $dF \in \mathcal{PM}$, appelé différentielle de F, de la manière suivante : $\forall\, a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ on pose $\boxed{(dF)\big(1_{[\alpha, \beta]}\big) = F(\beta) - F(\alpha)}$; en particulier $\forall\, a \leq c \leq b$ $\boxed{(dF)\big(1_{\{c\}}\big) = 0}$. On prolonge ensuite par linéarité à tout $\mathcal{E}$.

1.6. Théorème : 1) $\boxed{dF \in \mathcal{M}_D}$ et $\|dF\|_\star = V(F)$.

2) $dF = 0 \Leftrightarrow F = c \in \mathbb{R}$.

Dém : 1) $\|dF\|_\star = \sup_{h \in \mathcal{EU}} (dF)(h) = V(F)$ 2) trivial.

1.7.* Corollaire : V est une norme sur $\mathcal{CV}/\mathbb{R}$ et l'opérateur linéaire $\boxed{d \,:\, \mathcal{CV}/\mathbb{R} \to \mathcal{M}_D \,:\, F \mapsto dF}$ est une isométrie.

1.8. Théorème : Soit $\tilde f \in \mathcal{M}_D$ et soit $F \in \mathcal{CV}$ une primitive de $\tilde f$; alors on a $dF = \tilde f$. L'isométrie ci-dessus est donc bijective.

Dém : On a $\forall\, a \le \alpha \le \beta \le b \quad (dF)\big(1_{[\alpha,\beta]}\big) = F(\beta) - F(\alpha)$
$= \tilde f\big(1_{[a,\beta]}\big) - \tilde f\big(1_{[a,\alpha]}\big) = \tilde f\big(1_{[a,\beta]} - 1_{[a,\alpha]}\big) = \tilde f\big(1_{[\alpha,\beta]}\big)$; donc $dF = \tilde f$.

1.9. Théorème : $F \in \mathcal{CV}$ est lipschitzienne ssi $\boxed{dF \in \mathcal{B}}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Supposons que F soit lipschitzienne de constante $K > 0$; soit $h \in \mathcal{E}$;
on peut écrire $h = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r 1_{\mathrm{I}_r}$ où les 1_{I_r} sont des intervalles formant une partition de $[a,b]$ et où $\forall\, r \in [[0,n]]\ \ \alpha_r \in \mathbb{R}$; alors on a $\big|(dF)(h)\big| \le \sum_{r=1}^{n} |\alpha_r|\,\big|(dF)(1_{\mathrm{I}_r})\big|$
$\le K \sum_{r=1}^{n} |\alpha_r|\,|\mathrm{I}_r| = K \int_a^b |h(t)|\,dt = K\,\|h\|_1$; donc $|dF| \le K$.

b) $\Leftarrow$: Soit $K > 0$ tel que $|dF| \le K$; alors $\forall\, \alpha, \beta \in [a,b]$ on a
$\big|F(\alpha) - F(\beta)\big| = \big|(dF)\big(1_{[\alpha,\beta]}\big)\big| \le K \int_a^b 1_{[\alpha,\beta]}\,dt = K\,|\beta - \alpha|$.

1.10. Définition : $F \in \mathcal{CV}$ est absolument continue ssi $\boxed{dF \in \mathcal{L}^1}$;
on dit alors que dF est la dérivée de F et on note $\boxed{dF = F'}$.

1.11. Théorème : $F \in \mathcal{CV}$ est absolument continue ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a,b]$ on a

$$\boxed{\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \le \delta \ \Rightarrow\ \Big|\sum_k [F(\beta_k) - F(\alpha_k)]\Big| \le \varepsilon}.$$

Dém : C'est une reformulation du Corollaire VII 2.14.

1.12. Théorème : $F \in \mathcal{CV}$ est absolument continue ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a,b]$ on a

$$\boxed{\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \le \delta \ \Rightarrow\ \sum_k |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \le \varepsilon}.$$

Dém : Si nous notons (1) la condition du Théorème 1.11 et (2) la condition du Théorème 1.12 ; il faut montrer (1) $\Leftrightarrow$ (2).

a) $\Leftarrow$: Trivial.

b) $\Rightarrow$: Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que

$\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_k [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \right| \leq \varepsilon/2$;

soit une famille finie d'intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$ telle que $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$;

soit P l'ensemble des indices k tels que $F(\beta_k) - F(\alpha_k) > 0$

et N l'ensemble des indices k tels que $F(\beta_k) - F(\alpha_k) < 0$;

bien entendu $\sum_{k \in P} (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$ et $\sum_{k \in N} (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$; on a alors

$$\sum_k |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| = \left| \sum_{k \in P} [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \right| + \left| \sum_{k \in N} [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \right|$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

§ 2. Sommes de Riemann-Stieltjes

Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision D de $[a, b]$;

on pose $\|\mathrm{D}\| = \max_{0 \leq r \leq p-1} (a_{r+1} - a_r)$; choisissons $\forall r \in [[0, p-1]]$ $c_r \in [a_r, a_{r+1}]$.

2.1. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{M}_D$ et soit F une primitive de $\tilde{f}$; on définit

$$\forall h \in \mathcal{R} \quad \Omega_{\mathrm{D}}(h) = \sum_{r=0}^{p-1} h(c_r)\, \tilde{f}\left(1_{[a_r, a_{r+1}]}\right) = \sum_{r=0}^{p-1} h(c_r)\left[F(a_{r+1}) - F(a_r)\right].$$

Ce sont les sommes de Riemann-Stieltjes de h pour la mesure diffuse $\tilde{f}$.

2.2. Théorème : $\forall h \in \mathcal{R}$ on a $|\Omega_{\mathrm{D}}(h)| \leq \|\tilde{f}\|_\star \|h\|$.

Dém : $|\Omega_{\mathrm{D}}(h)| \leq \|h\| \sum_{r=0}^{p-1} \left|F(a_{r+1}) - F(a_r)\right| \leq \|h\|\, V(F) = \|h\|\, \|\tilde{f}\|_\star$.

2.3.* Lemme : $\forall h \in \mathcal{E}$ on a $\Omega_{\mathrm{D}}(h) \to \tilde{f}(h)$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

2.4. Théorème : $\forall h \in \mathcal{R}$ on a $\Omega_{\mathrm{D}}(h) \to \tilde{f}(h)$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

Dém : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $\Omega_{\mathrm{D}} - \tilde{f} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$.

§ 3. Formules classiques

3.1. Intégration par parties ("généralisée")

Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{M}_D$ et soient F et G des primitives de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$; alors on a

$$\boxed{\tilde{f}(G) + \tilde{g}(F) = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a)}$$

c-à-d
$$\boxed{\int_a^b G\, dF + \int_a^b F\, dG = \big[F(x)\, G(x) \big]_a^b}$$

Dém :

Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision D de $[a, b]$; on pose $\forall\, h \in \mathcal{R}$

$\Phi_{\mathrm{D}}(h) = \sum_{r=0}^{p-1} h(a_r) \big[F(a_{r+1}) - F(a_r) \big]$ et $\Psi_{\mathrm{D}}(h) = \sum_{r=0}^{p-1} h(a_{r+1}) \big[G(a_{r+1}) - G(a_r) \big]$;

on peut donc écrire

$\Phi_{\mathrm{D}}(G) + \Psi_{\mathrm{D}}(F) = \sum_{r=0}^{p-1} G(a_r) \big[F(a_{r+1}) - F(a_r) \big] + \sum_{r=0}^{p-1} F(a_{r+1}) \big[G(a_{r+1}) - G(a_r) \big]$

$= \sum_{r=0}^{p-1} \big[F(a_{r+1})\, G(a_{r+1}) - F(a_r)\, G(a_r) \big] = F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a)$;

et de plus $\Phi_{\mathrm{D}}(G) + \Psi_{\mathrm{D}}(F) \to \tilde{f}(G) + \tilde{g}(F)$ quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$.

3.2. Différentielle d'un produit

$\forall\, F, G \in \mathcal{CV}$ on a $F\,G \in \mathcal{CV}$ et $\boxed{d(F\,G) = F\, dG + G\, dF}$.

Dém : Soit $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = b$ une subdivision de $[a, b]$;

on a $\sum_{r=0}^{p-1} \big| F(a_{r+1})\, G(a_{r+1}) - F(a_r)\, G(a_r) \big|$

$= \sum_{r=0}^{p-1} \big| F(a_{r+1})\, G(a_{r+1}) - F(a_{r+1})\, G(a_r) + F(a_{r+1})\, G(a_r) - F(a_r)\, G(a_r) \big|$

$\leq \sum_{r=0}^{p-1} \big| F(a_{r+1}) \big| \big| G(a_{r+1}) - G(a_r) \big| + \big| G(a_r) \big| \big| F(a_{r+1}) - F(a_r) \big|$

$\leq \|F\|\, V(G) + \|G\|\, V(F)$; donc $V(F\,G) \leq \|F\|\, V(G) + \|G\|\, V(F)$, donc $F\,G \in \mathcal{CV}$.

Par ailleurs $\forall\, a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ le théorème d'intégration par parties appliqué à l'intervalle $[\alpha, \beta]$ nous permet d'écrire $\int_\alpha^\beta G\, dF + \int_\alpha^\beta F\, dG = [F(x)\, G(x)]_\alpha^\beta$,

c-à-d $\int_\alpha^\beta G\, dF + \int_\alpha^\beta F\, dG = \int_\alpha^\beta d(F\,G)$; on en déduit $\forall\, h \in \mathcal{R}$

$\int_a^b h\, G\, dF + \int_a^b h\, F\, dG = \int_a^b h\, d(F\,G)$, c-à-d $d(F\,G) = F\, dG + G\, dF$.

3.3. Différentielle d'un inverse

Soit $F \in \mathcal{CV}$ et supposons qu'il existe $A \in \mathbb{R}_\star^+$ tel que $|F| \geq A$; alors $\dfrac{1}{F} \in \mathcal{CV}$ et $\boxed{d\,(\dfrac{1}{F}) = -\,\dfrac{1}{F^2}\,dF}$.

Dém : Soit $a = a_0 < a_1 < \;\ldots\; < a_p = b$ une subdivision de $[\,a\,,b\,]$; on a

$$\sum_{r=0}^{p-1} \Big|\,\frac{1}{F\,(a_{r+1})} - \frac{1}{F\,(a_r)}\,\Big| = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{\big|\,F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\,\big|}{\big|\,F\,(a_r)\,F\,(a_{r+1})\,\big|} \leq \frac{1}{A^2}\,V(F)\ ,\ \text{donc}\ \ \frac{1}{F} \in \mathcal{CV}.$$

Par ailleurs posons $G = \dfrac{1}{F}$; on a $F\,G = 1$, donc $d\,(F\,G) = F\,dG + G\,dF = 0$, donc $d\,G = -\,\dfrac{G}{F}\,dF = -\,\dfrac{1}{F^2}\,dF$.

3.4. Différentielle d'une fonction composée

Soit $F \in \mathcal{CV}$ et soient $c = \min\limits_{x \in [\,a\,,b\,]} F(x)$ et $d = \max\limits_{x \in [\,a\,,b\,]} F(x)$; soit $g\ :\ [\,c,\,d\,] \to \mathbb{R}$ continuement dérivable ; alors $g \circ F \in \mathcal{CV}$ et $\boxed{d\,(g \circ F) = (g' \circ F)\,dF}$.

Dém : Soient $\alpha\,,\,\beta \in [\,a\,,b\,]$; il existe $e \in \big[\,F\,(\alpha)\,,\,F\,(\beta)\,\big]$ tel que $g\,[\,F\,(\beta)\,] - g\,[\,F\,(\alpha)\,] = g'(e)\,[\,F\,(\beta) - F\,(\alpha)\,]$; comme F est continue, il existe $\gamma \in [\,\alpha\,,\,\beta\,]$ tel que $e = F\,(\gamma)$; donc $\forall\,\alpha\,,\,\beta \in [\,a\,,b\,]$ il existe $\gamma \in [\,\alpha\,,\,\beta\,]$ tel que $g\,[\,F\,\beta)\,] - g\,[\,F\,(\alpha)\,] = g'\,[\,F\,(\gamma)\,]\,[\,F\,(\beta) - F\,(\alpha)\,]$.

Soit $a = a_0 < a_1 < \;\ldots\; < a_p = b$ une subdivision D de $[\,a\,,b\,]$; $\forall\,r \in [[\,0\,,\,p-1\,]]$ soit $c_r \in [\,a_r\,,\,a_{r+1}\,]$ tel que $g\,[\,F(a_{r+1})\,] - g\,[\,F\,(a_r)\,] = g'\,[\,F\,(c_r)\,]\,\big[\,F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\,\big]$;
on peut donc écrire $\forall\,h \in \mathcal{E}$

$$\sum_{r=0}^{p-1} h\,(c_r)\,\Big(g\,[\,F\,(a_{r+1})\,] - g\,[\,F\,(a_r)\,]\Big) = \sum_{r=0}^{p-1} h\,(c_r)\,g'\,[\,F\,(c_r)\,]\,\big[\,F\,(a_{r+1}) - F\,(a_r)\,\big]\ ;$$

quand $\|\mathrm{D}\| \to 0$ on obtient $\displaystyle\int_a^b h\,(t)\;d\,(g \circ F)\,(t) = \int_a^b h\,(t)\;(g' \circ F)\,(t)\;dF\,(t)$.

CHAPITRE IX

CHANGEMENT DE VARIABLE

Nous étudions le *changement de variable* pour une fonction réglée et un changement de variable continu, puis pour une fonctionnelle sommable et un changement de variable à dérivée réglée.

§ 1. Fonctions réglées

Soit $[c, d]$ $(c < d)$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\omega : [c, d] \to [a, b]$ une fonction *continue, monotone, bijective*.

1.1. Théorème :

$\forall F \in \mathcal{CV}([a,b])$ on a $\boxed{F \circ \omega \in \mathcal{CV}([c, d])}$ et $\boxed{V(F \circ \omega) = V(F)}$.

Dém :

La fonction $F \circ \omega$ est clairement continue ; montrons qu'elle est à variation bornée. Supposons par exemple ω croissante ; soit $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_p = d$ une subdivision de $[c, d]$; on peut écrire :

$$\sum_{r=0}^{p-1} \left| (F \circ \omega)(c_{r+1}) - (F \circ \omega)(c_r) \right| = \sum_{r=0}^{p-1} \left| F[\omega(c_{r+1})] - F[\omega(c_r)] \right| \leq \mathrm{V}(F)$$

car $\omega(a_0) < \omega(a_1) < \ldots < \omega(a_p)$ est une subdivision de $[a, b]$; on en déduit $V(F \circ \omega) \leq V(F)$; on peut donc aussi écrire $V(F) = V(F \circ \omega \circ \omega^{-1}) \leq V(F \circ \omega)$, donc $V(F \circ \omega) = V(F)$.

1.2. Théorème :

Soit $h \in \mathcal{R}([a,b])$; alors $h \circ \omega \in \mathcal{R}([c, d])$ et on a $\forall F \in \mathcal{CV}([a,b])$

$$\boxed{\int_c^d (h \circ \omega)\, d(F \circ \omega) = \pm \int_a^b h\, dF}$$

avec le signe + si ω est croissant et le signe − si ω est décroissant.

Dém : Soit $\sigma_n = (c_{nr})$ une suite de subdivisions de $[c, d]$ telle que $\|\sigma_n\| \to 0$;

on a $\displaystyle\int_c^d (h \circ \omega)\, d(F \circ \omega) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{r=0}^{p_n - 1} (h \circ \omega)(c_{nr}) \left[(F \circ \omega)(c_{nr+1}) - (F \circ \omega)(c_{nr}) \right]$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{r=0}^{p_n - 1} h[\omega(c_{nr})] \left\{ F[\omega(c_{nr+1})] - F[\omega(c_{nr})] \right\}.$$

Posons $\forall\, n, r$ $a_{nr} = \omega(c_{nr})$; alors $\tau_n = (a_{nr})$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$, croissantes ou décroissantes suivant que ω est croissant ou décroissant ;

de plus $\|\tau_n\| \to 0$ car ω est uniformément continu. On peut donc écrire

$$\int_c^d (h\circ\omega)\, d(F\circ\omega) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{r=0}^{p_n-1} h(a_{n\,r})\,\big[F(a_{n\,r+1}) - F(a_{n\,r})\big] = \pm\int_a^b h\, dF\,.$$

Schéma fonctionnel :

$$\begin{array}{ccc} [c,d] & \xrightarrow{\ \omega\ } & [a,b] \\ & & F \Big\downarrow \Big\downarrow h \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

1.3. Corollaire : $\forall\, h \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ on a $\boxed{\displaystyle\int_c^d (h\circ\omega)\; d\,\omega = \pm\int_a^b h\; dt}$.

Dém : On applique le théorème précédent avec $F(t) = t$.

1.4. Corollaire : Supposons ω absolument continu ; alors $\forall\, h \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$

$$\boxed{\int_c^d (h\circ\omega)\; |\omega'|\, du = \int_a^b h\; dt}\,.$$

§ 2. Fonctionnelles sommables

Soit $[c,d]$ (avec $c < d$) un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\omega : [c,d] \to [a,b]$ une fonction *continue, monotone, bijective, à dérivée réglée non nulle.*

2.1. Définition :

Soit $\tilde f \in \mathcal{L}^1\big([a,b]\big)$; alors on pose $\forall\, k \in \mathcal{R}\big([c,d]\big)$ $\boxed{(\tilde f\circ\omega)\,(k) = \tilde f\Big(\dfrac{k\circ\omega^{-1}}{|\omega'|\circ\omega^{-1}}\Big)}$.

$\tilde f\circ\omega$ est bien défini car $\forall\, k \in \mathcal{R}\big([c,d]\big)$ $k\circ\omega^{-1} \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$, et donc aussi $|\omega'|\circ\omega^{-1} \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

Schéma fonctionnel :

$$\begin{array}{ccc} \tilde f\circ\omega & & \tilde f \\ [c,d] & \xrightarrow{\ \omega\ } & [a,b] \\ \omega' \Big\downarrow \Big\downarrow k & & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

2.2.* <u>Lemme</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ on a $\boxed{\tilde f \circ \omega \in \mathcal{PM}([c,d])}$

et $\boxed{\|\tilde f \circ \omega\|_\star \le M\, \|\tilde f\|_1}$, avec $M = \left\| \dfrac{1}{|\omega'| \circ \omega^{-1}} \right\|$.

2.3. <u>Théorème</u> : Soit $\tilde f = f \in \mathcal{R}([a,b])$; alors $f \circ \omega$ représente effectivement la composée des fonctions ω et f ; en particulier $f \circ \omega \in \mathcal{R}([c,d])$.

<u>Dém</u> : Soit $h \in \mathcal{R}([a,b])$; en appliquant la définition de $f \circ \omega$ à $k = (h \circ \omega) . |\omega'| \in \mathcal{R}([c,d])$, on obtient

$$\int_c^d (h \circ \omega)\,(f \circ \omega)\, |\omega'|\, du = \int_a^b h\, f\, dt.$$

En comparant cette formule avec la formule classique du changement de variable dans une intégrale on en déduit que $f \circ \omega$ est bien la composée de ω et f.

2.4. <u>Théorème</u> :

$\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ on a $\boxed{\tilde f \circ \omega \in \mathcal{L}^1([c,d])}$ et $\boxed{\left\|\tilde f \circ \omega\right\|_1 \le M \left\|\tilde f\right\|_1}$

<u>Dém</u> : Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ telle que $f_n \xrightarrow{1} \tilde f$; alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f_n \circ \omega \in \mathcal{R}([c,d])$; or $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\left\| f_n \circ \omega - \tilde f \circ \omega \right\|_\star = \left\| (f_n - \tilde f) \circ \omega \right\|_\star \le M \left\| f_n - \tilde f \right\|_\star$; donc $f_n \circ \omega \xrightarrow{\star} \tilde f \circ \omega \in \mathcal{L}^1([c,d])$.

2.5. <u>Théorème</u> : $\forall\, \tilde f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ $\boxed{\displaystyle\int_c^d (\tilde f \circ \omega)\, |\omega'|\, du = \int_a^b \tilde f\, dt}$.

<u>Dém</u> : On applique la définition de $\tilde f \circ \omega$ à $k = |\omega'| \in \mathcal{R}([c,d])$.

<u>Exemples</u> :

1) <u>Translation</u>. $\omega : [a-\lambda, b-\lambda] \to [a,b] : x \mapsto x + \lambda$

alors $\forall\, k \in \mathcal{L}^1([a-\lambda, b-\lambda])$ on a $\displaystyle\int_{a-\lambda}^{b-\lambda} \tilde f(x+\lambda)\, k(x)\, dx = \int_a^b \tilde f(x)\, k(x-\lambda)\, dx$.

2) <u>Homothétie</u>. $\omega : [a/\lambda, b/\lambda] \to [a,b] : x \mapsto \lambda x$

alors $\forall\, k \in \mathcal{L}^1([a/\lambda, b/\lambda])$ on a $\displaystyle\int_{a/\lambda}^{b/\lambda} \tilde f(\lambda x)\, k(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \tilde f(x)\, k(x/\lambda)\, dx$.