

Intégration sur un intervalle compact de \mathbb{R}

CHAPITRE I

PSEUDO-MESURES, MESURES,
FONCTIONNELLES SOMMABLES SUR $[a, b]$

Comme annoncé dans l'introduction, ce premier chapitre a pour objectif de fournir le plus rapidement possible une définition totalement opérationnelle de l'espace \mathcal{L}^1 des classes de fonctions sommables sur un intervalle $[a, b]$. Nous y arriverons en considérant le dual de l'espace des fonctions étagées sur $[a, b]$ muni de la norme uniforme $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Ce dual nous fournira d'ailleurs tous les objets de base de notre théorie : *pseudo-mesures*, *fonctionnelles sommables* et plus loin *mesures*.

Tout d'abord nous introduisons les notations standards.

§ 0. NotationsA. Intervalles

1) $[a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} ($a < b$).

2) Si I est un intervalle borné de \mathbb{R} on note $|I|$ sa longueur.

B. Algèbres de fonctions

Les fonctions réelles sur l'intervalle $[a, b]$ constituent une algèbre pour les opérations naturelles d'addition et de multiplication. On distingue les sous-algèbres suivantes :

\mathcal{E} = algèbre des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ étagées (= en escalier
= constantes par morceaux)

\mathcal{C} = algèbre des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues

\mathcal{R} = algèbre des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ régliées

\mathcal{F} = algèbre des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornées

$\widehat{\mathcal{F}}$ = algèbre des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

C. Suprémum et infimum de deux fonctions réelles

$$\forall f, g \in \widehat{\mathcal{F}} \text{ on note } \boxed{f \vee g = \sup \{f, g\} : x \mapsto \max \{f(x), g(x)\}}$$
$$\text{et } \boxed{f \wedge g = \inf \{f, g\} : x \mapsto \min \{f(x), g(x)\}}.$$

Les lois \vee et \wedge sont commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre ; les algèbres \mathcal{E} , \mathcal{C} , \mathcal{R} , \mathcal{F} , $\widehat{\mathcal{F}}$ sont stables pour ces lois.

D. Normes, semi-normes, convergences

$\forall f \in \mathcal{F}$ on pose $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$; c'est la norme uniforme.

$\forall f \in \mathcal{R}$ on pose $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ et $\|f\|_2 = \left[\int_a^b f(x)^2 dx \right]^{1/2}$;

ce sont des semi-normes (voir définition au paragraphe suivant).

Dans $\widehat{\mathcal{F}}$ on note :

1) $f_n \xrightarrow{\circ} f$ ssi f_n converge simplement (ou ponctuellement) vers f sur $[a,b]$,

c-à-d ssi $\boxed{\forall c \in [a,b] \quad f_n(c) \rightarrow f(c)}$.

2) $f_n \xrightarrow{b} f$ ssi f_n converge simplement vers f sur $[a,b]$ et ssi la suite $\|f_n\|$ est bornée ; c'est la convergence bornée.

3) $f_n \xrightarrow{u} f$ ssi f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$, c-à-d ssi $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

Remarque : $[\xrightarrow{u}] \Rightarrow [\xrightarrow{b}]$ et $[\xrightarrow{b}] \Rightarrow [\xrightarrow{\circ}]$.

§ 1. N-dual d'un espace normé ou semi-normé

Nous commençons par rappeler les résultats classiques sur le dual d'un espace normé.

1.1. Définition :

Soit V un espace normé, c-à-d un espace vectoriel muni d'une norme notée $\| \cdot \|$.

Une forme linéaire $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est normée (ou continue) ss'il existe $M > 0$ tel que

$$\boxed{\forall u \in V \quad |\phi(u)| \leq M \|u\|}.$$

L'espace vectoriel de toutes les formes linéaires normées sur V s'appelle le dual normé de V , abrégé le N-dual de V , et se note V^* .

1.2. Définition : $\forall \phi \in V^*$ on note

$$\begin{aligned} \|\phi\|_* &= \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{|\phi(u)|}{\|u\|} = \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{\phi(u)}{\|u\|} \\ &= \sup_{u \in V, \|u\|=1} |\phi(u)| = \sup_{u \in V, \|u\|=1} \phi(u) \end{aligned}$$

1.3. Théorème fondamental : $\|\cdot\|_*$ est une norme sur V^* , appelée norme duale de la norme $\|\cdot\|$, et V^* est complet pour cette norme ; en d'autres termes :

Le N-dual d'un espace normé est un espace de Banach.

Dém : C'est un cas particulier du théorème sur les espaces semi-normés (voir *infra*).

1.4. Théorème :

Le N-dual d'un espace normé coïncide naturellement avec le N-dual de son complété.

Dém : Soient V un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$ et V^c son complété ; soient V^* et V^{c*} leurs N-duaux respectifs.

a) Montrons $V^* \subset V^{c*}$: soit $\phi \in V^*$; soit $u \in V^c$ et choisissons une suite $u_n \in V$ convergente en norme vers u ; on pose $\phi(u) = \lim \phi(u_n)$; il est facile de montrer que cette limite est bien définie et qu'elle ne dépend pas de la suite u_n choisie ; on a donc étendu ϕ en une forme linéaire sur V^* , dont on vérifie facilement qu'elle a la même norme que ϕ .

b) Montrons $V^{c*} \subset V^*$: soit $\phi \in V^{c*}$; en restreignant ϕ à V on définit une forme linéaire sur V de norme inchangée.

Dans les premiers chapitres nous ne travaillerons qu'avec des espaces normés, mais nous généralisons dès maintenant ce résultat aux espaces semi-normés, qui feront leur apparition au Chapitre VI.

1.5. Définition : Une semi-norme sur un espace vectoriel V est une application non identiquement nulle $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\|_s \leq \|u\|_s + \|v\|_s$
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V \quad \|\lambda u\|_s = |\lambda| \|u\|_s$.

Autrement dit une semi-norme se distingue d'une norme par le fait qu'elle peut s'annuler pour des vecteurs non nuls.

Un espace vectoriel muni d' **une** semi-norme s'appelle un espace semi-normé.

Un exemple fondamental d'espace semi-normé, que nous utiliserons plus loin, est l'espace \mathcal{E} muni de la semi-norme $\| \cdot \|_1$ ou $\| \cdot \|_2$.

1.6. Théorème : Soit V un espace semi-normé de semi-norme $\| \cdot \|_s$; on pose

$V_0 = \{ u \in V \mid \|u\|_s = 0 \}$; alors V_0 est un sous-espace de V et V/V_0 est naturellement un espace normé pour la norme $\|\hat{u}\| = \|u\|_s$.

Dém : Le fait que V_0 est un sous-espace de V est trivial.

Montrons que $\forall u \in V \ \forall w \in V_0$ on a $\|u+w\|_s = \|u\|_s$. En effet on a $\|u\|_s - \|w\|_s \leq \|u+w\|_s \leq \|u\|_s + \|w\|_s$, donc $\|u\|_s \leq \|u+w\|_s \leq \|u\|_s$.

On peut donc poser $\forall \hat{u} \in V/V_0 \ \|\hat{u}\| = \|u\|_s$; $\| \cdot \|$ est une norme sur V/V_0 car si $\|\hat{u}\| = 0$, alors $\|u\|_s = 0$, donc $u \in V_0$, c-à-d $\hat{u} = 0$.

1.7. Définition : Soit V un espace semi-normé de semi-norme $\| \cdot \|_s$; une forme linéaire

$\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est normée ss'il existe $M > 0$ tel que $\forall u \in V \ |\phi(u)| \leq M \|u\|_s$.

De même que pour un espace normé, nous appellerons l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires normées sur V le N-dual de V et nous le noterons V^* .

Remarquons que $\forall \phi \in V^* \ \forall u \in V_0 \ \phi(u) = 0$.

1.8. Définition : On note $V_x = V - V_0$ et $\forall \phi \in V^*$

$$\begin{aligned} \|\phi\|_* &= \sup_{u \in V_x} \frac{|\phi(u)|}{\|u\|_s} = \sup_{u \in V_x} \frac{\phi(u)}{\|u\|_s} \\ &= \sup_{u \in V, \|u\|_s = 1} |\phi(u)| = \sup_{u \in V, \|u\|_s = 1} \phi(u) \end{aligned}$$

De manière remarquable $\| \cdot \|_*$ est encore une *norme* sur V^* comme l'énonce le théorème suivant :

1.9. Théorème fondamental : $\| \cdot \|_*$ est une **norme** sur V^* , appelée norme duale

de la semi-norme $\| \cdot \|_s$, et V^* est **complet** pour cette norme ; en d'autres termes :

Le N-dual d'un espace semi-normé est un espace de Banach.

Dém : Soit ϕ_n une suite de Cauchy dans V^* ; alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q \geq p \quad \|\phi_p - \phi_q\|_* \leq \varepsilon$, ce qui équivaut à écrire que $\forall u \in V_x \quad \forall q \geq p \quad |\phi_p(u) - \phi_q(u)| \leq \varepsilon \|u\|_s$; d'autre part on a $\forall u \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \phi_n(u) = 0$; on en conclut que $\forall \varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u \in V \quad \forall q \geq p \quad |\phi_p(u) - \phi_q(u)| \leq \varepsilon \|u\|_s$; $\forall u \in V$ la suite $\phi_n(u)$ est donc de Cauchy dans \mathbb{R} , c-à-d convergente; posons dès lors $\forall u \in V \quad \phi(u) = \lim_n \phi_n(u)$.

La linéarité de ϕ est évidente; montrons $\phi \in V^*$; soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u \in V \quad \forall q \geq p \quad |\phi_p(u) - \phi_q(u)| \leq \|u\|_s$; on en déduit $\forall u \in V \quad |\phi_p(u) - \phi(u)| \leq \|u\|_s$; soit par ailleurs $M > 0$ tel que $\forall u \in V \quad |\phi(u)| \leq M \|u\|_s$; on peut alors écrire $\forall u \in V \quad |\phi(u)| \leq |\phi_p(u)| + \|u\|_s \leq (M + 1) \|u\|_s$.

Montrons enfin $\phi_n \xrightarrow{*} \phi$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u \in V \quad \forall p, q \geq n \quad |\phi_p(u) - \phi_q(u)| \leq \varepsilon \|u\|_s$; on en déduit $\forall u \in V \quad \forall p \geq n \quad |\phi_p(u) - \phi(u)| \leq \varepsilon \|u\|_s$, c-à-d $\forall p \geq n \quad \|\phi_p - \phi\|_* \leq \varepsilon$.

1.10.* Théorème : Le N-dual de l'espace semi-normé V est canoniquement isométrique au N-dual de l'espace normé V/V_0 .

§ 2. Pseudo-mesures sur [a,b]

2.1. Définition fondamentale :

Une pseudo-mesure sur $[a,b]$ est un élément du N-dual de l'espace normé $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$.

(Rappelons que $\|\cdot\|$ est la norme uniforme sur \mathcal{E}).

Ou encore : Une pseudo-mesure sur $[a,b]$ est une forme linéaire $\tilde{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété : il existe $M > 0$ tel que $\forall g \in \mathcal{E} \quad |\tilde{f}(g)| \leq M \|g\|$.

On note \mathcal{PM} l'espace vectoriel des pseudo-mesures sur $[a,b]$.

Autrement dit \mathcal{PM} est le N-dual de l'espace normé $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$.

Remarque : Les pseudo-mesures seront toujours représentées par des lettres "tildées" pour les différencier clairement des (vraies) fonctions.

Grâce à cette définition le lecteur vient de franchir d'un seul coup plusieurs niveaux dans le grand jeu des mathématiques. Les pseudo-mesures constituent en effet un outil d'analyse si performant qu'elles permettent de pénétrer avec une aisance presque surnaturelle dans les notions les plus subtiles et les secrets les mieux gardés de la "théorie de la mesure". Un seul autre énoncé contient en germe autant de puissance concentrée, c'est "Que la lumière soit !..."

2.2. Théorème : \mathcal{PM} constitue un espace de Banach pour la norme $\| \cdot \|_*$, duale de la

norme $\| \cdot \|$, définie par
$$\| \tilde{f} \|_* = \sup_{g \in \mathcal{E}, \|g\|=1} | \tilde{f}(g) | = \sup_{g \in \mathcal{E}, \|g\|=1} \tilde{f}(g).$$

Dém : C'est l'application directe du Théorème 1.3 à l'espace normé $(\mathcal{E}, \| \cdot \|)$.

Notation : On écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{*} \tilde{f}$ ssi $\| \tilde{f}_n - \tilde{f} \|_* \rightarrow 0$ et on note $\tilde{f} = \lim_n^* \tilde{f}_n$; on dit que la suite \tilde{f}_n converge en norme $\| \cdot \|_*$ vers \tilde{f} .

2.3. Théorème : Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ est convergente en norme $\| \cdot \|_*$ dans \mathcal{PM} ssi

la suite
$$\delta_n = \sup_{p > n} \| \tilde{f}_p - \tilde{f}_n \|_* \rightarrow 0.$$

Dém : C'est le critère de Cauchy.

2.4. Définition : Tout $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ s'étend canoniquement à \mathcal{R} en posant $\forall g \in \mathcal{R}$

$$\tilde{f}(g) = \lim_n \tilde{f}(g_n) \quad \text{avec } g_n \in \mathcal{E} \quad \text{et } g_n \xrightarrow{u} g.$$

Notation intégrale : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall g \in \mathcal{R}$ on note
$$\int_a^b g(x) \tilde{f}(x) = \int_a^b g \tilde{f} = \tilde{f}(g).$$

2.5. Théorème : \mathcal{PM} est naturellement isométrique au N-dual de $(\mathcal{R}, \| \cdot \|)$.

Dém : La "restriction à \mathcal{E} " est une isométrie naturelle du N-dual de $(\mathcal{R}, \| \cdot \|)$ sur le N-dual de $(\mathcal{E}, \| \cdot \|)$. Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur.

Passons maintenant à des exemples de pseudo-mesures.

2.6.* Théorème-Définition :

$\forall f \in \mathcal{R}$ la forme linéaire $\boxed{\{f\} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \int_a^b g f dx}$ est une pseudo-mesure,

appelée la pseudo-mesure associée à f . En particulier à la fonction constante

$\boxed{\mathbb{1} = 1_{[a,b]} \in \mathcal{E}}$ est associée la pseudo-mesure $\boxed{\{\mathbb{1}\} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \int_a^b g dx}$.

Notation : On note $\underline{\mathcal{R}} = \{\{f\} \mid f \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{PM}$.

On utilise une notation analogue pour tous les *sous-ensembles* de \mathcal{R} .

Dans la pratique on remplacera souvent abusivement la notation $\{f\}$ par la notation f .

Remarque : Nous verrons plus loin que $\forall f \in \mathcal{R}$ la pseudo-mesure $\{f\}$ est en fait une *mesure*, et plus précisément une *fonctionnelle sommable*; c'est en particulier le cas pour $\boxed{\{\mathbb{1}\}}$ appelée mesure de Lebesgue. En conséquence nous parlerons de $\{f\}$ comme la fonctionnelle associée à f , plutôt que comme la pseudo-mesure associée à f .

Un autre exemple de pseudo-mesure est constitué par les “mesures de Dirac” définies par $\delta_c : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(c)$ où c est un réel fixé de l'intervalle $[a,b]$; nous en ferons l'étude détaillée au Chapitre VII.

Donnons aussi un exemple d'une pseudo-mesure *qui n'est pas une mesure* : il s'agit de la pseudo-mesure $\delta_{0+} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ limite à droite en 0 de f .

2.7. Théorème : $\forall f \in \mathcal{R}$ on a $\|f\|_* = \|f\|_1$.

Dém : Soit $f \in \mathcal{R}$; il faut montrer $\sup_{\substack{g \in \mathcal{E} \\ \|g\|=1}} \left| \int_a^b g f dx \right| = \|f\|_1$.

C'est évident si $f \in \mathcal{E}$; soit alors $f \in \mathcal{R}$; $\forall g \in \mathcal{E}$ tel que $\|g\| = 1$ on a

$$\left| \int_a^b g f dx \right| \leq \int_a^b |g| |f| dx \leq \int_a^b |f| dx = \|f\|_1, \text{ donc } \|f\|_* \leq \|f\|_1.$$

Par ailleurs soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{u} f$; on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{E} \\ \|g\|=1}} \left| \int_a^b g f_n dx \right| \leq \sup_{\substack{g \in \mathcal{E} \\ \|g\|=1}} \left| \int_a^b g f dx \right| + \sup_{\substack{g \in \mathcal{E} \\ \|g\|=1}} \left| \int_a^b g (f_n - f) dx \right| \\ &\leq \|f\|_* + (b-a) \|f_n - f\|; \text{ en faisant } n \rightarrow +\infty \text{ on trouve } \|f\|_1 \leq \|f\|_*. \end{aligned}$$

Outre sa structure d'espace vectoriel, \mathcal{PM} possède une multiplication externe plus générale que la simple multiplication par les réels : la multiplication par des *fonctions réglées*, ce qui confère à \mathcal{PM} une structure de *module* sur \mathcal{R} . Nous nous contenterons pour le moment de définir cette multiplication, réservant l'étude des modules pour le Chapitre V.

2.8. Définition : $\forall g \in \mathcal{R} \quad \forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on définit

$$\boxed{g \cdot \tilde{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto \tilde{f}(gh)}.$$

2.9.* Théorème :

$$\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall g \in \mathcal{R} \quad \text{on a} \quad \boxed{g \cdot \tilde{f} \in \mathcal{PM}} \quad \text{et} \quad \|g \cdot \tilde{f}\|_* \leq \|g\| \|\tilde{f}\|_*.$$

2.10.* Théorème : $\forall f, g \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{g \cdot \{f\} = \{gf\}}$.

2.11.* Corollaire : $\forall f \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{\{f\} = f \cdot \{\mathbb{1}\}}$.

§ 3. Fonctionnelles sommables sur [a,b]

Nous pouvons maintenant décrire, avec un degré de clarté jamais atteint auparavant, les *classes de fonctions sommables* pour la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$, classes que nous nommerons simplement *fonctionnelles sommables* sur $[a,b]$.

3.1. Définition fondamentale

$$\boxed{\mathcal{L}^1 \text{ est la fermeture de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathcal{PM} \text{ pour la norme } \|\cdot\|_*}.$$

Les éléments de \mathcal{L}^1 s'appellent les fonctionnelles sommables (on dit aussi intégrables) sur $[a,b]$.

Vu le caractère fondateur et novateur de cette définition nous en donnons ci-dessous quatre versions de plus en plus explicites :

Version 1 :

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{E}$ tel que $\|\tilde{f} - g\|_* \leq \varepsilon$.

Version 2 :

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ss'il existe une suite $g_n \in \mathcal{E}$ telle que $\|\tilde{f} - g_n\|_* \rightarrow 0$.

Version 3 : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{E}$ tel que

$$\forall h \in \mathcal{E} \quad \left| \tilde{f}(h) - \int_a^b g(x) h(x) dx \right| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Version 4 : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ss'il existe une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et une suite $g_n \in \mathcal{E}$ telles que $\forall h \in \mathcal{E} \quad \left| \tilde{f}(h) - \int_a^b g_n(x) h(x) dx \right| \leq \varepsilon_n \|h\|$.

En résumé, les fonctionnelles sommables ne sont rien d'autre que des pseudo-mesures particulières : celles que l'on peut approcher en norme $\|\cdot\|_*$ par des (fonctionnelles associées à des) fonctions étagées. On constate d'ailleurs que c'est la connaissance préalable de l'espace \mathcal{PM} qui permet de définir aussi aisément l'espace \mathcal{L}^1 , confirmant ainsi le rôle crucial et fondamental des pseudo-mesures. Insistons aussi sur le fait qu'une fonctionnelle sommable est un objet parfaitement et totalement déterminé, ayant une *vraie valeur* pour *chaque* fonction étagée, et non pas un "machin défini presque partout".

Notation : 1) $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on note $\boxed{\|\tilde{f}\|_1 = \|\tilde{f}\|_*}$.

2) On écrit $f_n \xrightarrow{1} \tilde{f}$ ssi $\|f_n - \tilde{f}\|_1 \rightarrow 0$ et on note $\boxed{\tilde{f} = \lim_n^1 f_n}$;

on dit que la suite f_n converge en norme $\|\cdot\|_1$ vers \tilde{f} .

3.2.* Théorème : 1) $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^1$

2) \mathcal{L}^1 est un $\boxed{\text{espace de Banach}}$ pour la norme $\|\cdot\|_1$

3) \mathcal{L}^1 est fermé dans \mathcal{PM}

4) \mathcal{E} est dense dans \mathcal{L}^1 .

Notation intégrale : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on écrit $\int_a^b \tilde{f}(x) dx$ au lieu de $\int_a^b \tilde{f}(x)$; on a donc

$$\boxed{\int_a^b \tilde{f}(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\mathbb{1})}.$$

3.3. Lemme : Soit $g \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$; alors il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que $\|g - h\|_1 \leq \varepsilon$.

Dém : Il suffit de faire un dessin !

3.4.* Corollaire : \mathcal{C} est dense dans \mathcal{L}^1 , et par application du théorème de Weierstrass, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans \mathcal{L}^1 .

Récapitulatif : $\boxed{\mathcal{E} + \mathcal{C} \subset \mathcal{R} \xrightarrow[\text{surj.}]{} \mathcal{R} \subset \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{PM}}$.

§ 4. Sommes de Lebesgue

Nous énonçons et démontrons d'abord ci-dessous un lemme élémentaire d'analyse fonctionnelle, absent des livres de cours malgré sa simplicité, sa généralité et sa très grande utilité ; nous y ferons d'ailleurs plusieurs fois appel dans cet ouvrage.

4.1. Lemme fondamental de l'analyse fonctionnelle (LFAF)

Énoncé : Soient X et Y des espaces de Banach et soit une suite d'applications linéaires $T_n : X \rightarrow Y$ avec $\sup_n \|T_n\| < +\infty$. On suppose qu'il existe un sous-espace dense A de X tel que $\forall a \in A \quad T_n(a) \rightarrow 0$; alors $\forall x \in X \quad T_n(x) \rightarrow 0$.

(Ce lemme s'étend sans peine aux suites généralisées).

Dém : Posons $M = \sup_n \|T_n\|$; soit $x \in X$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $a \in A$ tel que $\|x - a\| \leq \varepsilon/M$; on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|T_n(x)\| \leq \|T_n(a)\| + \|T_n(x) - T_n(a)\| \leq \|T_n(a)\| + \|T_n\| \|x - a\| \leq \|T_n(a)\| + \varepsilon$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad \|T_n(a)\| \leq \varepsilon$; alors $\forall n \geq N \quad \|T_n(x)\| \leq 2\varepsilon$; donc $T_n(x) \rightarrow 0$.

4.2. **Définition** : Soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ une subdivision D de $[a, b]$; on pose $\|D\| = \max_r (a_{r+1} - a_r)$; on définit $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$

$$W_D(\tilde{f}) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{1}{a_{r+1} - a_r} \left(\int_{a_r}^{a_{r+1}} \tilde{f}(u) du \right) \mathbb{1}_{]a_r, a_{r+1}[}.$$

$W_D(\tilde{f})$ est la fonction étagée dont les valeurs sont les moyennes de \tilde{f} les intervalles $]a_r, a_{r+1}[$. Ces fonctions constituent les sommes de Lebesgue associées à \tilde{f} .

4.3.* **Théorème** : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $W_D(\tilde{f}) \in \mathcal{E}$ et $\int_a^b W_D(\tilde{f}) dx = \int_a^b \tilde{f} dx$.

4.4. **Théorème** : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $|W_D(\tilde{f})| \leq W_D(|\tilde{f}|)$ et donc $\|W_D(\tilde{f})\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_1$.

Dém : La première inégalité est triviale ; de plus on a

$$\|W_D(\tilde{f})\|_1 = \int_a^b |W_D(\tilde{f})| dx \leq \int_a^b W_D(|\tilde{f}|) dx = \int_a^b |\tilde{f}| dx = \|\tilde{f}\|_1.$$

4.5. **Théorème** : $\forall f \in \mathcal{C}$ on a $W_D(f) \xrightarrow{u} f$ quand $\|D\| \rightarrow 0$.

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b]$ on ait $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$; soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$

une subdivision D de $[a, b]$ telle que $\|D\| \leq \eta$; $\forall r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ choisissons

$\xi_r \in [a_r, a_{r+1}]$ tel que $\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(u) du = f(\xi_r)(a_{r+1} - a_r)$;

on a alors $W_D(f) = \sum_{r=0}^{p-1} f(\xi_r) \mathbb{1}_{[a_r, a_{r+1}]}$; on en déduit $\forall x \in [a_r, a_{r+1}]$

$|W_D(f)(x) - f(x)| = |f(\xi_r) - f(x)| \leq \varepsilon$; donc $W_D(\tilde{f}) \xrightarrow{u} f$.

4.6. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ on a $W_D(\tilde{f}) \xrightarrow{1} \tilde{f}$ quand $\|D\| \rightarrow 0$.

Dém : On applique le *LFAF* aux opérateurs linéaires $W_D - I : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^1$.

Les sommes de Lebesgue constituent donc une suite (généralisée) explicite de fonctions étagées convergeant en norme $\|\cdot\|_1$ vers une fonctionnelle sommable donnée.

§ 5. Espaces ordonnés. Ordre dans \mathcal{PM}

Les espaces vectoriels munis d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel constituent un cadre fondamental pour toutes les théories exposées dans ce livre, en particulier sous la forme des espaces de Riesz. Nous donnons ci-dessous les définitions et propriétés de base relatives à ces espaces.

5.1. Définition : Si V est un espace vectoriel muni d'un ordre on note

$$V^+ = \{ u \in V \mid u \geq 0 \}.$$

5.2. Définition : Un espace vectoriel V muni d'un ordre est un espace ordonné ssi

$$\begin{array}{l} 1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \forall u \in V^+ \quad \lambda u \geq 0 \\ 2) \quad \forall u, v \in V \quad [v \geq u \Leftrightarrow v - u \geq 0] \end{array}$$

5.3. * Théorème : Si V est un espace ordonné il en est de même de tous ses sous-espaces.

5.4. Théorème : Soit V un espace ordonné ; alors $u, v \in V^+ \Rightarrow u + v \in V^+$.

Dém : On a $u + v - u = v \geq 0$, donc $u + v \geq u \geq 0$.

5.5. Définition : Un espace ordonné V est archimédien ssi

$$\forall u, v \in V^+ \quad [(\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+ \quad \lambda u \leq v) \Rightarrow u = 0],$$

ou de manière équivalente ssi $\boxed{\forall u, v \in V^+ \left[(\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+ u \leq \lambda v) \Rightarrow u = 0 \right]}$.

5.6.* Théorème : Si V est un espace ordonné archimédien il en est de même de tous ses sous-espaces.

Exemple : \mathcal{F} est un espace ordonné archimédien pour l'ordre naturel :

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \left[f \leq g \text{ ssi } \forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x) \right].$$

5.7. Définition : Un sous-espace W d'un espace ordonné V est intégral (ou solide)

$$\text{ssi } \boxed{\forall v \in V^+ \forall w \in W^+ (v \leq w \Rightarrow v \in W^+)}$$

5.8.* Théorème : W est un sous-espace intégral de l'espace ordonné V ssi

$$\boxed{\forall v \in V \forall x, y \in W (x \leq v \leq y \Rightarrow v \in W)}$$

5.9.* Théorème : Soit V un espace ordonné et W un sous-espace intégral de V ; alors V/W possède une structure naturelle d'espace ordonné avec l'ordre défini par :

$$\forall \hat{u}, \hat{v} \in V/W \quad \boxed{\hat{u} \leq \hat{v} \text{ ss'il existe } w \in W \text{ tel que } u \leq v + w}$$

5.10. Définition fondamentale : On définit un ordre naturel dans \mathcal{PM} en posant

$$\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM} \quad \boxed{\tilde{f} \leq \tilde{g} \text{ ssi } \forall h \in \mathcal{E}^+ \tilde{f}(h) \leq \tilde{g}(h)}$$

5.11. Théorème : \mathcal{PM} muni de cet ordre est un espace ordonné archimédien.

Dém : On a $\mathcal{PM}^+ = \{ \tilde{f} \in \mathcal{PM} \mid \forall h \in \mathcal{E}^+ \tilde{f}(h) \geq 0 \}$; montrons que \mathcal{PM} est archimédien ; soient $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ tels que $\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+ \lambda \tilde{f} \leq \tilde{g}$; soit $h \in \mathcal{E}^+$; on a donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+ \lambda \tilde{f}(h) \leq \tilde{g}(h)$, donc aussi $0 \leq \tilde{f}(h) \leq \lambda \tilde{g}(h)$; en faisant $\lambda \rightarrow 0^+$ on trouve $\tilde{f}(h) = 0$; donc $\forall h \in \mathcal{E} \tilde{f}(h) = \tilde{f}(h^+) - \tilde{f}(h^-) = 0$, (où h^+ et h^- sont les parties positive et négative de f), donc $\tilde{f} = 0$.

5.12.* Théorème : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ une suite convergente en norme $\| \cdot \|_*$ vers $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f} \in \mathcal{PM}^+$. Ce résultat équivaut à la conservation des inégalités par passage à la limite dans \mathcal{PM} .

5.13.* Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\boxed{\| \tilde{f} \|_* = \tilde{f}(\mathbb{1})}$.

§ 6. Théorème de convergence monotone

Nous donnons pour commencer la définition des pseudo-mesures *spéciales*, qui constituent la forme *native* sous laquelle se présentent souvent les pseudo-mesures. Elles nous serviront entre autres à la démonstration du théorème de convergence monotone.

6.1. Définition : Une pseudo-mesure spéciale sur $[a, b]$ est une application $\phi : \mathcal{E}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

<p>1) $\forall h, k \in \mathcal{E}^+ \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \quad \phi(\lambda h + \mu k) = \lambda \phi(h) + \mu \phi(k)$ 2) il existe $M > 0$ tel que $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \phi(h) \leq M \ h\$</p>

Une pseudo-mesure spéciale constitue donc en quelque sorte une “forme linéaire normée” définie sur les fonctions étagées *positives*.

Notation : On note \mathcal{PM}_S l'espace vectoriel des pseudo-mesures spéciales sur $[a, b]$.

6.2. Théorème : Toute pseudo-mesure spéciale ϕ s'étend de manière unique en une pseudo-mesure, appelée prolongement de ϕ à \mathcal{E} .

Dém : Soit $\phi \in \mathcal{PM}_S$; on pose $\forall h \in \mathcal{E} \quad \boxed{\phi(h) = \phi(h^+) - \phi(h^-)}$, h^+ et h^- étant les parties positive et négative de h ; montrons que $\phi \in \mathcal{PM}$.

a) On a clairement $\forall h \in \mathcal{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \phi(\lambda h) = \lambda \phi(h)$.

b) On a $\forall h \in \mathcal{E} \quad \phi(-h) = \phi[(-h)^+] - \phi[(-h)^-] = \phi(h^-) - \phi(h^+) = -\phi(h)$.

c) On a $(h+k)^+ - (h+k)^- = h+k = h^+ - h^- + k^+ - k^-$

donc $(h+k)^+ + h^- + k^- = (h+k)^- + h^+ + k^+$,

donc $\phi[(h+k)^+] + \phi(h^-) + \phi(k^-) = \phi[(h+k)^-] + \phi(h^+) + \phi(k^+)$

donc $\phi[(h+k)^+] - \phi[(h+k)^-] = \phi(h^+) - \phi(h^-) + \phi(k^+) - \phi(k^-)$

c-à-d $\phi(h+k) = \phi(h) + \phi(k)$.

d) On a $\forall h \in \mathcal{E} \quad \phi(h) = |\phi(h^+) - \phi(h^-)| \leq |\phi(h^+)| + |\phi(h^-)|$
 $\leq M (\|h^+\| + \|h^-\|) \leq 2M \|h\|$.

e) L'unicité est évidente car si $\phi \in \mathcal{PM}$, par linéarité on a nécessairement $\forall h \in \mathcal{E} \quad \phi(h) = \phi(h^+) - \phi(h^-)$.

6.3.* Corollaire :

L'application $\mathcal{PM} \rightarrow \mathcal{PM}_S : \tilde{f} \rightarrow \tilde{f}|_{\mathcal{E}^+}$ est un isomorphisme linéaire.

Autrement dit une pseudo-mesure spéciale n'est ni plus ni moins que la restriction

d'une pseudo-mesure à \mathcal{E}^+ , ce qui peut s'écrire $\boxed{\mathcal{PM}_S = \mathcal{PM}|_{\mathcal{E}^+}}$.

6.4. Théorème de convergence monotone dans \mathcal{PM}

Enoncé : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\tilde{f}_n\|_{\star} \leq M$; alors \tilde{f}_n converge en norme $\|\cdot\|_{\star}$ vers une pseudo-mesure $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; on a donc aussi $\lim_n \|\tilde{f}_n\|_{\star} = \|\tilde{f}\|_{\star}$.

Dém : On peut supposer la suite \tilde{f}_n croissante et positive ; on pose $\forall g \in \mathcal{E}^+$
 $\tilde{f}(g) = \lim_n \tilde{f}_n(g)$; la limite existe bien car la suite $\tilde{f}_n(g)$ est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\tilde{f}_n(g) \leq \|\tilde{f}_n\|_{\star} \|g\| \leq M \|g\|$. On a donc $\tilde{f} \in \mathcal{PM}_S$; notons encore \tilde{f} le prolongement de \tilde{f} à \mathcal{E} . On a clairement $\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{f} - \tilde{f}_n \geq 0$, donc $\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_{\star} = (\tilde{f} - \tilde{f}_n)(\mathbf{1}) = \tilde{f}(\mathbf{1}) - \tilde{f}_n(\mathbf{1}) \rightarrow 0$; donc $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$.

Notation : On note $\boxed{\tilde{f} = \sup_n \tilde{f}_n \text{ ou } \inf_n \tilde{f}_n}$ suivant que la suite \tilde{f}_n est croissante ou décroissante.

Remarquons à quel point la démonstration de ce théorème céléberrissime se révèle élémentaire dans notre théorie.

6.5.* **Corollaire** : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ une suite croissante telle que $\sup_n \|\tilde{f}_n\|_{\star} < +\infty$; alors on a

$$\boxed{\forall g \in \mathcal{E}^+ \quad \left(\sup_n \tilde{f}_n \right) (g) = \sup_n [\tilde{f}_n(g)]} \quad \text{et} \quad \boxed{\left\| \sup_n \tilde{f}_n \right\|_{\star} = \sup_n \|\tilde{f}_n\|_{\star}}.$$

Le théorème de convergence monotone est manifestement vrai dans n'importe quel sous-espace fermé de \mathcal{PM} ; en particulier on a le

6.6.* Théorème de convergence monotone dans \mathcal{L}^1

Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^1$ une suite monotone ; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\|\tilde{f}_n\|_1 \leq M$; alors \tilde{f}_n converge en norme $\|\cdot\|_1$ vers une fonctionnelle $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$;
on a donc aussi $\lim_n \|\tilde{f}_n\|_1 = \|\tilde{f}\|_1$.

§ 7. Valeur absolue d'une pseudo-mesure

La valeur absolue constitue un élément structurel fondamental de \mathcal{PM} et lui confère le statut d'espace de Riesz. Elle permet d'importer dans \mathcal{PM} une partie significative des concepts et des outils de l'analyse réelle.

7.1. Définition : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$; on pose $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \boxed{|\tilde{f}|(h) = \|h\tilde{f}\|_\star}$.

7.2. * Lemme : $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \text{on a } |\tilde{f}|(\lambda h) = \lambda |\tilde{f}|(h)$.

7.3. * Lemme : $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \text{on a } |\tilde{f}|(h) \leq \|\tilde{f}\|_\star \|h\|$.

7.4. Théorème : $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \boxed{|\tilde{f}|(h) = \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} |\tilde{f}(k)| = \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} \tilde{f}(k)}$.

Dém : On a $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}|(h) = \|h\tilde{f}\|_\star = \sup_{k \in \mathcal{E}, \|k\| \leq 1} (h\tilde{f})(k) = \sup_{k \in \mathcal{E}, \|k\| \leq 1} \tilde{f}(kh)$
 $= \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} \tilde{f}(k)$.

7.5. Lemme : Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{E}^+$ tels que $h_1 \cdot h_2 = 0$; alors

$$|\tilde{f}|(h_1 + h_2) = |\tilde{f}|(h_1) + |\tilde{f}|(h_2).$$

Dém : $|\tilde{f}|(h_1 + h_2) = \sup_{\substack{k \in \mathcal{E} \\ |k| \leq h_1 + h_2}} \tilde{f}(k) = \sup_{\substack{k_1, k_2 \in \mathcal{E} \\ |k_1| \leq h_1, |k_2| \leq h_2}} \tilde{f}(k_1 + k_2)$
 $= \sup_{\substack{k_1, k_2 \in \mathcal{E} \\ |k_1| \leq h_1, |k_2| \leq h_2}} \tilde{f}(k_1) + \tilde{f}(k_2) = \sup_{\substack{k_1 \in \mathcal{E} \\ |k_1| \leq h_1}} \tilde{f}(k_1) + \sup_{\substack{k_2 \in \mathcal{E} \\ |k_2| \leq h_2}} \tilde{f}(k_2) = |\tilde{f}|(h_1) + |\tilde{f}|(h_2)$.

7.6. Théorème : $|\tilde{f}| \in \mathcal{PM}_S$.

Dém : Il reste à montrer que $\forall h, k \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}|(h+k) = |\tilde{f}|(h) + |\tilde{f}|(k)$.

Soient $h, k \in \mathcal{E}^+$; on peut trouver une partition de $[a, b]$ en intervalles I_r ($1 \leq r \leq n$)

telle que $h = \sum_{r=1}^n \alpha_r \mathbb{1}_{I_r}$ et $k = \sum_{r=1}^n \beta_r \mathbb{1}_{I_r}$ avec $\forall r \in [[1, n]] \quad \alpha_r \in \mathbb{R}^+$ et $\beta_r \in \mathbb{R}^+$.

On a alors $|\tilde{f}|(h+k) = |\tilde{f}| \left[\sum_{r=1}^n (\alpha_r + \beta_r) \mathbb{1}_{I_r} \right] = \sum_{r=1}^n |\tilde{f}| \left[(\alpha_r + \beta_r) \mathbb{1}_{I_r} \right]$
 $= \sum_{r=1}^n (\alpha_r + \beta_r) |\tilde{f}|(\mathbb{1}_{I_r}) = \sum_{r=1}^n \alpha_r |\tilde{f}|(\mathbb{1}_{I_r}) + \sum_{r=1}^n \beta_r |\tilde{f}|(\mathbb{1}_{I_r}) = |\tilde{f}|(h) + |\tilde{f}|(k)$.

Notation : Nous continuons à noter $|\tilde{f}|$ le prolongement de $|\tilde{f}|$ à \mathcal{E} .

7.7. Théorème : $|\tilde{f}| \in \mathcal{PM}^+$ et $\boxed{\| |\tilde{f}| \|_\star = \|\tilde{f}\|_\star}$.

Dém : $\forall h \in \mathcal{E}$ on a $||\tilde{f}|(h)| = ||\tilde{f}|(h^+) - |\tilde{f}|(h^-)| \leq |\tilde{f}|(h^+) + |\tilde{f}|(h^-)$
 $= |\tilde{f}|(h^+ + h^-) = |\tilde{f}|(|h|) = ||h|\tilde{f}|_* \leq \|\tilde{f}\|_* \|h\|$; donc $|\tilde{f}| \in \mathcal{PM}$;
d'autre part on a clairement $|\tilde{f}| \geq 0$, donc $||\tilde{f}|||_* = |\tilde{f}|(\mathbf{1}) = \|\tilde{f}\|_*$.

7.8. Définition : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on appelle $|\tilde{f}|$ la **valeur absolue** de \tilde{f} .

7.9. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall h \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{|\tilde{f}|(h) \leq |\tilde{f}|(|h|)}$.

Dém :

a) $h \in \mathcal{E}^+$: on a $|\tilde{f}|(h) \leq \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} |\tilde{f}|(k) = |\tilde{f}|(h)$

b) $h \in \mathcal{E}$: on a $|\tilde{f}|(h) = |\tilde{f}|(h^+ + h^-) = |\tilde{f}|(h^+) + |\tilde{f}|(h^-) \leq |\tilde{f}|(h^+) + |\tilde{f}|(h^-)|$
 $\leq |\tilde{f}|(h^+) + |\tilde{f}|(h^-) = |\tilde{f}|(h^+ + h^-) = |\tilde{f}|(|h|)$

c) $h \in \mathcal{R}$: vrai par densité de \mathcal{E} dans \mathcal{R} .

7.10. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a

$$\boxed{|\tilde{f}| \leq \tilde{g} \Leftrightarrow \left[\forall h \in \mathcal{E} \quad |\tilde{f}|(h) \leq \tilde{g}(|h|) \right]}.$$

Dém :

a) \Rightarrow : On a $\forall h \in \mathcal{E} \quad |\tilde{f}|(h) \leq |\tilde{f}|(|h|) \leq \tilde{g}(|h|)$.

b) \Leftarrow : On a $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}|(h) = \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} |\tilde{f}|(k) \leq \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} \tilde{g}(|k|) = \tilde{g}(h)$.

7.11. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall h \in \mathcal{R}$ on a $\boxed{|\tilde{f}|(|h|) \leq \|\tilde{f}\|_* \|h\|}$.

Dém : a) $h \in \mathcal{E}$: c'est l'inégalité de la norme.

b) $h \in \mathcal{R}$: vrai par densité de \mathcal{E} dans \mathcal{R} .

7.12. Théorème : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{|\tilde{f}| \leq |\tilde{g}| \Rightarrow \|\tilde{f}\|_* \leq \|\tilde{g}\|_*}$.

Dém : $|\tilde{f}| \leq |\tilde{g}| \Rightarrow \|\tilde{f}\|_* = |\tilde{f}|(\mathbf{1}) \leq |\tilde{g}|(\mathbf{1}) = \|\tilde{g}\|_*$.

Les théorèmes qui suivent montrent que la valeur absolue dans \mathcal{PM} jouit des mêmes propriétés que dans \mathcal{R} . La valeur absolue dans \mathcal{PM} est donc à la fois l'“image par dualité” de la valeur absolue dans \mathcal{R} , et sa généralisation puisque $\mathcal{R} \subset \mathcal{PM}$.

7.13. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall \tilde{g} \in \mathcal{PM}^+$ on a $\boxed{|\tilde{f}| \leq \tilde{g} \Leftrightarrow -\tilde{g} \leq \tilde{f} \leq \tilde{g}}$.

Dém :

a) \Rightarrow : On a $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}(h)| \leq |\tilde{f}|(h) \leq \tilde{g}(h)$, c-à-d $-\tilde{g}(h) \leq \tilde{f}(h) \leq \tilde{g}(h)$.

b) \Leftarrow : On a $\forall k \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}(k)| \leq \tilde{g}(k)$; donc $\forall k \in \mathcal{E}$

$$|\tilde{f}(k)| = |\tilde{f}(k^+) - \tilde{f}(k^-)| \leq |\tilde{f}(k^+)| + |\tilde{f}(k^-)| \leq \tilde{g}(k^+) + \tilde{g}(k^-) = \tilde{g}(|k|) ;$$

$$\text{on a donc } \forall h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f}|(h) = \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} |\tilde{f}|(k) \leq \sup_{k \in \mathcal{E}, |k| \leq h} \tilde{g}(|k|) = \tilde{g}(h).$$

7.14. * Corollaire : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \boxed{-|\tilde{f}| \leq \tilde{f} \leq |\tilde{f}|}$.

7.15. Théorème : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM} \quad \text{on a } \boxed{|\tilde{f} + \tilde{g}| \leq |\tilde{f}| + |\tilde{g}|}$.

$$\begin{aligned} \text{Dém} : \text{ On a } \forall h \in \mathcal{E}^+ \quad |\tilde{f} + \tilde{g}|(h) &= \sup_{|k| \leq h} [\tilde{f}(k) + \tilde{g}(k)] \leq \sup_{|k| \leq h} \tilde{f}(k) + \sup_{|k| \leq h} \tilde{g}(k) \\ &= |\tilde{f}|(h) + |\tilde{g}|(h) = (|\tilde{f}| + |\tilde{g}|)(h). \end{aligned}$$

7.16. * Corollaire : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM} \quad \text{on a } \quad ||\tilde{f}| - |\tilde{g}|| \leq |\tilde{f} - \tilde{g}|$.

7.17. * Corollaire : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM} \quad \text{on a } \quad ||\tilde{f}| - |\tilde{g}||_* \leq \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_*$.

7.18. * Corollaire : L'application $\mathcal{PM} \rightarrow \mathcal{PM}^+ : \tilde{f} \mapsto |\tilde{f}|$ est continue pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_*$.

7.19. Théorème : Si $f \in \mathcal{R}$, la valeur absolue de f définie dans \mathcal{PM} coïncide avec la valeur absolue ordinaire de f .

Dém : C'est évident si $f \in \mathcal{E}$. Notons provisoirement la valeur absolue définie dans \mathcal{PM} par $|\cdot|_\alpha$. Soit $f \in \mathcal{R}$ et soit $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{u} f$; on a $|f_n|_\alpha \xrightarrow{*} |f|_\alpha$ c-à-d $|f_n| \xrightarrow{*} |f|_\alpha$; or on a $f_n \xrightarrow{u} f$, donc $|f_n| \xrightarrow{u} |f|$, donc $|f_n| \xrightarrow{*} |f|$; donc $|f|_\alpha = |f|$.

7.20. Corollaire : $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |\tilde{f}| \in \mathcal{L}^1}$.

Dém : Soit une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{1} f$; alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \in \mathcal{E}$ et $|f_n| \xrightarrow{1} |\tilde{f}|$, donc $|\tilde{f}| \in \mathcal{L}^1$.

Remarque : Etonnament la réciproque de cette proposition est vraie elle aussi : si $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et si $|\tilde{f}| \in \mathcal{L}^1$, alors $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ (Corollaire VI 1.14).

7.21. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM} \quad \forall g \in \mathcal{R} \quad \text{on a } |g\tilde{f}| = |g||\tilde{f}|$.

Dém : Soit d'abord $g \in \mathcal{E}$; alors $\forall h \in \mathcal{E}^+$ on a $|g\tilde{f}|(h) = \sup_{|k| \leq h} (g\tilde{f})(k)$
 $= \sup_{|k| \leq h} \tilde{f}(gk) = \sup_{|k| \leq h} \tilde{f}(|g|k) \leq \sup_{|\ell| \leq |g|h} \tilde{f}(\ell) = |\tilde{f}|(|g|h) = (|g||\tilde{f}|)(h)$;
par ailleurs donnons-nous $h \in \mathcal{E}^+$; soit $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathcal{E}$ tel que $|\ell| \leq |g|h$ et
 $|\tilde{f}|(|g|h) - \varepsilon \leq \tilde{f}(\ell)$; définissons $k \in \mathcal{E}$ par : $\forall x \in [a, b]$ $k(x) = 0$ ssi $g(x) = 0$,
sinon $k(x) = \ell(x)/g(x)$; on a $|k| \leq h$ et donc $(|g||\tilde{f}|)(h) - \varepsilon = |\tilde{f}|(|g|h) - \varepsilon \leq \tilde{f}(\ell)$
 $= \tilde{f}(gk) = (g\tilde{f})(k) \leq |g\tilde{f}|(h)$; donc $\forall h \in \mathcal{E}^+$ $|g\tilde{f}|(h) = (|g||\tilde{f}|)(h)$, donc aussi
 $\forall h \in \mathcal{E}$ $|g\tilde{f}|(h) = (|g||\tilde{f}|)(h)$, c-à-d $|g\tilde{f}| = |g||\tilde{f}|$.

Le résultat général se déduit alors de la densité de \mathcal{E} dans \mathcal{R} pour la topologie uniforme.

Nous pouvons maintenant généraliser le Suprémum et l'Infimum aux pseudo-mesures , avec des définitions et des propriétés analogues au cas des fonctions réelles.

7.22. Définition : On pose $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$

$$\text{Sup} \{ \tilde{f}, \tilde{g} \} = \boxed{\tilde{f} \vee \tilde{g} = \frac{1}{2} (\tilde{f} + \tilde{g} + |\tilde{f} - \tilde{g}|)} \in \mathcal{PM}$$

$$\text{et } \text{Inf} \{ \tilde{f}, \tilde{g} \} = \boxed{\tilde{f} \wedge \tilde{g} = \frac{1}{2} (\tilde{f} + \tilde{g} - |\tilde{f} - \tilde{g}|)} \in \mathcal{PM}.$$

7.23. * Théorème : Les lois \vee et \wedge sont idempotentes, commutatives et associatives.

7.24. * Théorème : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde{f} \wedge \tilde{g} \leq \tilde{f} \leq \tilde{f} \vee \tilde{g}}$.

7.25. Définition : On pose $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde{f}^+ = \tilde{f} \vee 0 = \frac{1}{2} (|\tilde{f}| + \tilde{f})}$ $\in \mathcal{PM}^+$

$$\text{et } \boxed{\tilde{f}^- = (-\tilde{f})^+ = (-\tilde{f}) \vee 0 = \frac{1}{2} (|\tilde{f}| - \tilde{f})} \in \mathcal{PM}^+.$$

7.26. * Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ $\boxed{\tilde{f}^+ \wedge \tilde{f}^- = 0}$, $\boxed{\tilde{f} = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^-}$

$$\text{et } \boxed{|\tilde{f}| = \tilde{f}^+ + \tilde{f}^- = \tilde{f}^+ \vee \tilde{f}^- = \tilde{f} \vee (-\tilde{f})}$$
 .

Ces propriétés constituent quelques exemples du très riche catalogue des relations vérifiées par les lois \vee et \wedge , que nous détaillerons dans le Chapitre II , consacré aux espaces de Riesz généraux .

§ 8. Mesures et mesures diffuses sur $[a, b]$

Il manque aux pseudo-mesures, malgré leurs excellentes propriétés, une condition supplémentaire de continuité sans laquelle les théorèmes classiques de convergence, et en particulier le théorème de convergence dominée de Lebesgue, ne s'appliquent pas.

Considérons par exemple la suite g_n constituée par les fonctions caractéristiques des intervalles ouverts $]0, \frac{1}{n}[$ ($n \in \mathbb{N}^*$), suite manifestement dominée ! Il est clair que la suite g_n converge simplement (et non uniformément) vers 0. Mais si nous faisons agir la pseudo-mesure $\delta_0^+ : g \mapsto \lim_{0^+} g$ sur la suite g_n nous obtenons $\forall n \in \mathbb{N}^* \delta_0^+(g_n) = 1$, alors qu'évidemment $\delta_0^+(0) = 0$.

On est donc naturellement amené à poser la définition suivante :

8.1. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ est une mesure ssi $\boxed{\forall c \in [a, b] \lim_{d \rightarrow c^\pm} \tilde{f}(1]c, d[) = 0}$.

Cette propriété s'appelle l'HYPERCONTINUITÉ des mesures.

On note $\mathcal{M} = \{ \tilde{f} \in \mathcal{PM} \mid \tilde{f} \text{ mesure} \}$.

8.2. Définition : $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ est une mesure diffuse ssi $\boxed{\forall c \in [a, b] \tilde{f}(1\{c\}) = 0}$.

On note $\mathcal{M}_D = \{ \tilde{f} \in \mathcal{PM} \mid \tilde{f} \text{ mesure diffuse} \}$.

La mesure diffuse $\boxed{\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} : h \mapsto \int_a^b h(x) dx}$ n'est autre que la mesure de Lebesgue.

Remarque : Pour des exemples de mesures non diffuses et de pseudo-mesures qui ne sont pas des mesures, voir Chapitre VII § 3 et § 4.

8.3.* Théorème : $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{M}_D \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{PM}$.

8.4. Théorème : \mathcal{M} et \mathcal{M}_D sont des sous-espaces fermés de \mathcal{PM} .

Dém : Montrons que \mathcal{M} est fermé dans \mathcal{PM} .

Soit une suite $\tilde{f} \in \mathcal{M}$ telle que $\tilde{f}_n \xrightarrow{*} \tilde{f} \in \mathcal{PM}$; il faut montrer $\tilde{f} \in \mathcal{M}$.

Soit $c \in [a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$; soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{f}_N - \tilde{f}\|_* \leq \varepsilon$; on a

$$\forall d \in [a, b] \quad |\tilde{f}(1]c, d[)| \leq |\tilde{f}_N(1]c, d[)| + |(\tilde{f}_N - \tilde{f})(1]c, d[)| \leq |\tilde{f}_N(1]c, d[)| + \varepsilon,$$

donc $\overline{\lim}_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}(1]c, d[)| \leq \varepsilon$; on a donc $\lim_{d \rightarrow c^\pm} \tilde{f}(1]c, d[) = 0$.

La fermeture de \mathcal{M}_D est évidente.

8.5. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow |\tilde{f}| \in \mathcal{M}}$.

Dém :

a) \Rightarrow : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $h \in \mathcal{E}$ tel que $\|h\| \leq 1$ et $\|\tilde{f}\|_* \leq \tilde{f}(h) + \varepsilon$;
soit I un intervalle de $[a, b]$ et soit $E = [a, b] - I$; on peut écrire

$$\begin{aligned} |\tilde{f}|(1_I) + |\tilde{f}|(1_E) &= |\tilde{f}|(\mathbb{1}) = \|\tilde{f}\|_* \leq \tilde{f}(h) + \varepsilon = \tilde{f}(h 1_I) + \tilde{f}(h 1_E) + \varepsilon \\ &\leq \tilde{f}(h 1_I) + |\tilde{f}|(1_E) + \varepsilon ; \text{ donc } |\tilde{f}|(1_I) \leq \tilde{f}(h 1_I) + \varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant $I =]c, d[$ on obtient $\overline{\lim}_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}|(1_{]c, d[}) \leq \overline{\lim}_{d \rightarrow c^\pm} \tilde{f}(h 1_{]c, d[}) + \varepsilon$;
or h est localement constante à gauche ou à droite de c , donc $\lim_{d \rightarrow c^\pm} \tilde{f}(h 1_{]c, d[}) = 0$,
donc $\overline{\lim}_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}|(1_{]c, d[}) \leq \varepsilon$; donc $\lim_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}|(1_{]c, d[}) = 0$.

b) \Leftarrow : On a $\lim_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}(1_{]c, d[})| \leq \lim_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}|(1_{]c, d[}) = 0$.

8.6. Théorème : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{M}_D \Leftrightarrow |\tilde{f}| \in \mathcal{M}_D}$.

Dém : Résulte de l'égalité évidente $\forall c \in [a, b] \quad |\tilde{f}|(1_{\{c\}}) = |\tilde{f}(1_{\{c\}})|$.

8.7. * Corollaire :

$\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ est une mesure diffuse ssi $\boxed{\forall c \in [a, b] \quad \lim_{d \rightarrow c^\pm} |\tilde{f}|(1_{]c, d[}) = 0}$.

8.8. Théorème : Soient $\tilde{f} \in \mathcal{M}^+$, $g \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$; alors il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que
 $\|h\| = \|g\|$ et $\tilde{f}(|g - h|) < \varepsilon$.

Dém : Il suffit de faire un dessin !

8.9. * Corollaire : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{M}$ on a $\boxed{\|\tilde{f}\|_* = \sup_{g \in \mathcal{C}, \|g\|=1} |\tilde{f}(g)|}$.

8.10. * Corollaire : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{M}$ on a $\boxed{\tilde{f}|_{\mathcal{C}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0}$ et $\boxed{\tilde{f}|_{\mathbb{R}[X]} = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} = 0}$

Ce dernier corollaire équivaut à dire qu'une mesure est entièrement déterminée par ses valeurs sur les fonctions continues ou même simplement sur les polynômes. Rappelons néanmoins qu'en tant que pseudo-mesure, une mesure est de toute façon entièrement déterminée par ses valeurs sur les fonctions étagées.

§ 9. Convergence fine dans \mathcal{PM}

Nous nous intéressons à un nouveau type de convergence, la convergence *fine*, ainsi dénommée car plus fine que la convergence en norme. Cette convergence est l'analogie pour \mathcal{PM} de la condition de convergence dans \mathbb{R} donnée par l'égalité de la limite inférieure et de la limite supérieure. Mais alors que dans \mathbb{R} cette condition est équivalente au critère de Cauchy pour la norme, il n'en est plus de même dans \mathcal{PM} .

9.1. Définition :

Une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ est dominée ss'il existe $\tilde{F} \in \mathcal{PM}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\tilde{f}_n| \leq \tilde{F}$.

Provisoirement toutes les suites seront supposées dominées.

9.2. Définition : Pour toute suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ on pose

$$\boxed{\text{Sup}_n \tilde{f}_n = \text{Sup}_n \tilde{f}_0 \vee \tilde{f}_1 \vee \dots \vee \tilde{f}_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{Inf}_n \tilde{f}_n = \text{Inf}_n \tilde{f}_0 \wedge \tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_n}.$$

Ce sont respectivement le Suprémum et l'Infimum de la suite \tilde{f}_n ;

on a évidemment toujours $\boxed{\text{Inf}_n \tilde{f}_n \leq \text{Sup}_n \tilde{f}_n}$.

9.3.* Théorème : Pour toute suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ on a

$$\boxed{\left\| \text{Inf}_n \tilde{f}_n \right\|_* \leq \inf_n \|\tilde{f}_n\|_* \leq \sup_n \|\tilde{f}_n\|_* \leq \left\| \text{Sup}_n \tilde{f}_n \right\|_*}.$$

9.4. Définition : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$; on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{g}_n = \text{Inf}_{p \geq n} \tilde{f}_p \quad \text{et} \quad \tilde{h}_n = \text{Sup}_{p \geq n} \tilde{f}_p ;$$

\tilde{g}_n est une suite croissante, \tilde{h}_n une suite décroissante ; on pose ensuite

$$\boxed{\underline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n = \text{Sup}_n \tilde{g}_n = \text{Sup}_n \text{Inf}_p \tilde{f}_{n+p}} \in \mathcal{PM}$$

et

$$\boxed{\overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n = \text{Inf}_n \tilde{h}_n = \text{Inf}_n \text{Sup}_p \tilde{f}_{n+p}} \in \mathcal{PM}.$$

Ce sont respectivement la Limite Inférieure et la Limite Supérieure de la suite \tilde{f}_n ;

on a évidemment toujours $\boxed{\underline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n \leq \overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n}$.

9.5. Définition : On dit que \tilde{f}_n converge finement vers $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ ssi

$$\tilde{f} = \underline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n = \overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n, \text{ c-à-d ssi } \tilde{f} = \text{Sup}_n \text{Inf}_p \tilde{f}_{n+p} = \text{Inf}_n \text{Sup}_p \tilde{f}_{n+p};$$

on écrit $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f}$ et on note $\tilde{f} = \text{Lim}_n \tilde{f}_n$.

9.6. Théorème : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f}$ ssi $\overline{\text{Lim}}_n |\tilde{f}_n - \tilde{f}| = 0$,

c-à-d ssi la suite $\tilde{\phi}_n = \text{Sup}_{p \geq n} |\tilde{f}_p - \tilde{f}| \xrightarrow{*} 0$.

Dém :

a) \Rightarrow : Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $\forall r \geq n \left(\text{Inf}_{p \geq n} \tilde{f}_p \right) - \tilde{f} \leq \tilde{f}_r - \tilde{f} \leq \left(\text{Sup}_{p \geq n} \tilde{f}_p \right) - \tilde{f}$,

donc $\forall r \geq n \quad |\tilde{f}_r - \tilde{f}| \leq \left| \left(\text{Inf}_{p \geq n} \tilde{f}_p \right) - \tilde{f} \right| \vee \left| \left(\text{Sup}_{p \geq n} \tilde{f}_p \right) - \tilde{f} \right|;$

donc $\text{Sup}_{r \geq n} |\tilde{f}_r - \tilde{f}| \leq \left| \left(\text{Inf}_{p \geq n} \tilde{f}_p \right) - \tilde{f} \right| \vee \left| \left(\text{Sup}_{p \geq n} \tilde{f}_p \right) - \tilde{f} \right|$
 $= \left| \left(\text{Inf}_p \tilde{f}_{n+p} \right) - \tilde{f} \right| \vee \left| \left(\text{Sup}_p \tilde{f}_{n+p} \right) - \tilde{f} \right| \xrightarrow{*} 0.$

b) \Leftarrow : Soit $n \in \mathbb{N}$; on a

$\left| \left(\text{Sup}_p \tilde{f}_{n+p} \right) - \tilde{f} \right| = \left| \text{Sup}_p (\tilde{f}_{n+p} - \tilde{f}) \right| \leq \text{Sup}_p |\tilde{f}_{n+p} - \tilde{f}| = \text{Sup}_{r \geq n} |\tilde{f}_r - \tilde{f}| \xrightarrow{*} 0;$

de même on a $\left| \left(\text{Inf}_p \tilde{f}_{n+p} \right) - \tilde{f} \right| = \left| \text{Inf}_p (\tilde{f}_{n+p} - \tilde{f}) \right| \leq \text{Sup}_p |\tilde{f}_{n+p} - \tilde{f}| \xrightarrow{*} 0.$

9.7. CRITÈRE PRATIQUE : Soient $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$; alors $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall q \geq p \quad \left\| \text{Sup}_{p \leq r \leq q} |\tilde{f}_r - \tilde{f}| \right\|_* \leq \varepsilon.$$

9.8.* Corollaire : $\forall \tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \xrightarrow{*} \tilde{f}$;

de plus si \tilde{f}_n est monotone on a $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f} \Leftrightarrow \tilde{f}_n \xrightarrow{*} \tilde{f}$.

9.9.* Théorème :

Soient $\tilde{f}_n, \tilde{f} \in \mathcal{PM}$ tels que $\tilde{f}_n \xrightarrow{*} \tilde{f}$; alors $\underline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n \leq \tilde{f} \leq \overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n$.

9.10. Théorème : Pour toute suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}^+$ on a

$$\left\| \underline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n \right\|_* \leq \underline{\lim}_n \|\tilde{f}_n\|_* \leq \overline{\lim}_n \|\tilde{f}_n\|_* \leq \left\| \overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n \right\|_*.$$

Dém : On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_p \|\tilde{f}_{n+p}\|_* \leq \left\| \text{Sup}_p \tilde{f}_{n+p} \right\|_*$; or $\text{Sup}_p \tilde{f}_{n+p} \xrightarrow{*} \overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n$
quand $n \rightarrow +\infty$; donc $\overline{\text{Lim}}_n \|\tilde{f}_n\|_* \leq \left\| \overline{\text{Lim}}_n \tilde{f}_n \right\|_*$.

9.11. Définition : On dit que la suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ est Cauchy-fine (C-fine) ssi la suite

$$\boxed{\tilde{\phi}_n = \text{Sup}_{p>n} |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| \xrightarrow{*} 0}.$$

9.12. Théorème : \mathcal{PM} est complet pour la convergence fine.

Dém : Soit $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ une suite C-fine ; on a $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\sup_{p>n} \|\tilde{f}_p - \tilde{f}_n\|_* \leq \left\| \text{Sup}_{p>n} |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| \right\|_* \rightarrow 0$, donc \tilde{f}_n est une suite de Cauchy
dans \mathcal{PM} pour la norme $\|\cdot\|_*$; posons $\tilde{f} = {}^* \lim_n \tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$.

Montons que $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} \tilde{f}$; soit $\varepsilon > 0$; soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_* \leq \varepsilon$ et
 $\left\| \text{Sup}_{p>n} |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| \right\|_* \leq \varepsilon$; comme $\forall p \in \mathbb{N} \quad |\tilde{f}_p - \tilde{f}| \leq |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| + |\tilde{f}_n - \tilde{f}|$,
on peut écrire $\left\| \text{Sup}_{p>n} |\tilde{f}_p - \tilde{f}| \right\|_* \leq \left\| \text{Sup}_{p>n} |\tilde{f}_p - \tilde{f}_n| \right\|_* + \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_* \leq 2\varepsilon$.

9.13. CRITÈRE PRATIQUE : La suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ est Cauchy-fine ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall q > p \quad \left\| \text{Sup}_{p<r \leq q} |\tilde{f}_r - \tilde{f}_p| \right\|_* \leq \varepsilon}.$$

Désormais les suites ne seront plus supposées dominées à priori ; remarquons néanmoins que
la convergence fine implique toujours la domination ; autrement dit, une suite qui converge
finement est nécessairement dominée.

9.14. * Théorème : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_* < +\infty$;
alors $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{f}_n|$ convergent finement dans \mathcal{PM} ; de plus $\tilde{f}_n \xrightarrow{\times} 0$.

Dém : On a $\forall p < q$

$$\left\| \text{Sup}_{p<r \leq q} |\tilde{f}_p + \tilde{f}_{p+1} + \dots + \tilde{f}_r| \right\|_* \leq \left\| \text{Sup}_{p<r \leq q} (|\tilde{f}_p| + |\tilde{f}_{p+1}| + \dots + |\tilde{f}_r|) \right\|_*$$

$$= \left\| |\tilde{f}_p| + |\tilde{f}_{p+1}| + \dots + |\tilde{f}_q| \right\|_* \leq \sum_{r=p}^{\infty} \|\tilde{f}_r\|_* ;$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{f}_n|$ convergent finement dans \mathcal{PM} ; de plus $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left\| \text{Sup}_{q \geq p} |\tilde{f}_p| \right\|_* \leq \left\| \sum_{r=p}^{\infty} |\tilde{f}_r| \right\|_* \leq \sum_{r=p}^{\infty} \|\tilde{f}_r\|_* , \text{ donc } \tilde{f}_n \xrightarrow{\times} 0.$$

9.15. Théorème : Soit $\tilde{f} \in \mathcal{PM}$ et soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ telle que $\tilde{f}_n \xrightarrow{\star} \tilde{f}$; alors il existe une sous-suite $\tilde{f}_{n'}$ telle que $\tilde{f}_{n'} \xrightarrow{\times} \tilde{f}$.

Dém : On construit une suite strictement croissante d'indices $n' \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\tilde{f}_{n'} - \tilde{f}\|_{\star} \leq 1/2^n$; alors on a pour tout indice n'

$$\left\| \sup_{r' \geq n'} |\tilde{f}_{r'} - \tilde{f}| \right\|_{\star} \leq \sum_{r'=n'}^{\infty} \|\tilde{f}_{r'} - \tilde{f}\|_{\star} \leq \sum_{r=n}^{\infty} 1/2^r = 2/2^n ; \text{ donc } \tilde{f}_{n'} \xrightarrow{\times} \tilde{f}.$$

9.16. Théorème : La convergence fine dans \mathcal{PM} est une convergence non topologique.

Dém : Soit une suite $\tilde{f}_n \in \mathcal{PM}$ convergeant en norme vers 0, mais ne convergeant pas finement (par exemple en n'étant pas dominée) ; supposons qu'on puisse définir la convergence fine à partir d'une topologie ; comme la suite \tilde{f}_n ne converge pas finement vers 0, il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 pour cette topologie et une sous-suite $\tilde{f}_{n'}$ tels que $\forall n' \tilde{f}_{n'} \notin \mathcal{V}$; mais comme la suite $\tilde{f}_{n'}$ converge en norme vers 0, elle contient une sous-suite $\tilde{f}_{n''}$ qui converge finement vers 0 ; on a donc $\forall n''$ à partir d'un certain rang $\tilde{f}_{n''} \in \mathcal{V}$; contradiction.

§ 10. Suprémum et Infimum généralisés dans \mathcal{PM}

On généralise aux parties de \mathcal{PM} les notions de Suprémum et d'Infimum, déjà rencontrés pour les parties finies et les suites de \mathcal{PM} (voir §§ 6.4, 7.22, 9.2).

10.1. Définition : Soit \mathcal{A} une partie de \mathcal{PM} satisfaisant aux propriétés suivantes :

- 1) Il existe $\tilde{F} \in \mathcal{PM}$ tel que $\forall \tilde{f} \in \mathcal{A} \quad \tilde{f} \leq \tilde{F}$ (\mathcal{A} est dominée supérieurement)
- 2) $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{A}$ on a $\tilde{f} \vee \tilde{g} \in \mathcal{A}$ (\mathcal{A} est stable pour la loi \vee) ;

on pose alors $\boxed{\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde{\Phi}(h) = \sup_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \tilde{f}(h)}$.

10.2. Théorème : $\tilde{\Phi} \in \mathcal{PM}_S$.

Dém : On a clairement $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \tilde{\Phi}(\lambda h) = \lambda \tilde{\Phi}(h)$.

Montrons que $\forall h, k \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde{\Phi}(h+k) = \tilde{\Phi}(h) + \tilde{\Phi}(k)$; on a $\forall \tilde{f} \in \mathcal{A} \quad \forall h, k \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde{f}(h+k) = \tilde{f}(h) + \tilde{f}(k) \leq \tilde{\Phi}(h) + \tilde{\Phi}(k)$, donc $\tilde{\Phi}(h+k) \leq \tilde{\Phi}(h) + \tilde{\Phi}(k)$.

Par ailleurs soient $h, k \in \mathcal{E}^+$ et $\varepsilon > 0$; il existe $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{A}$ tels que

$$\tilde{f}(h) \geq \tilde{\Phi}(h) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \tilde{f}(k) \geq \tilde{\Phi}(k) - \varepsilon ;$$

on a donc $\tilde{\Phi}(h) + \tilde{\Phi}(k) - 2\varepsilon \leq \tilde{f}(h) + \tilde{g}(k) \leq (\tilde{f} \vee \tilde{g})(h) + (\tilde{f} \vee \tilde{g})(k)$

$\leq (\tilde{f} \vee \tilde{g})(h+k) \leq \Phi(h+k)$. On en déduit $\tilde{\Phi}(h+k) = \tilde{\Phi}(h) + \tilde{\Phi}(k)$.

De plus soit $\tilde{f}_0 \in \mathcal{A}$; on a $\forall \tilde{f} \in \mathcal{A} \quad \forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde{f}_0(h) \leq \tilde{f}(h) \leq \tilde{F}(h)$,

donc $\forall h \in \mathcal{E}^+ \quad \tilde{f}_0(h) \leq \tilde{\Phi}(h) \leq \tilde{F}(h)$, donc $\forall h \in \mathcal{E}^+$

$$|\tilde{\Phi}(h)| \leq \max \{ |\tilde{f}_0(h)|, |\tilde{F}(h)| \} \leq \max \{ \|\tilde{f}_0\|_*, \|\tilde{F}\|_* \} \|h\|.$$

Notation : On note encore $\tilde{\Phi}$ le prolongement de $\tilde{\Phi}$ à \mathcal{E} .

10.3.* Théorème :

- 1) $\tilde{\Phi} \in \mathcal{PM}$
- 2) $\tilde{\Phi} \leq \tilde{F}$
- 3) $\forall \tilde{f} \in \mathcal{A} \quad \tilde{f} \leq \tilde{\Phi}$
- 4) $\forall \tilde{G} \in \mathcal{PM} \quad [(\forall \tilde{f} \in \mathcal{A} \quad \tilde{f} \leq \tilde{G}) \Rightarrow \tilde{\Phi} \leq \tilde{G}]$.

On pose $\boxed{\tilde{\Phi} = \text{Sup } \mathcal{A} = \text{Sup}_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \tilde{f}}$.

Si \mathcal{A} est dominée inférieurement et stable par \wedge , on définit $\text{Inf } \mathcal{A} = \text{Inf}_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \tilde{f}$ de manière analogue. $\text{Sup } \mathcal{A}$ se nomme le Suprémum de \mathcal{A} et $\text{Inf } \mathcal{A}$ se nomme l'Infimum de \mathcal{A} .

10.4. Théorème : $\boxed{\inf_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \|\tilde{\Phi} - \tilde{f}\|_* = 0}$.

Dém : $\forall \tilde{f} \in \mathcal{A}$ on a $\|\tilde{\Phi} - \tilde{f}\|_* = (\tilde{\Phi} - \tilde{f})(\mathbf{1}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{1}) - \tilde{f}(\mathbf{1})$, donc

$$\inf_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \|\tilde{\Phi} - \tilde{f}\|_* = \inf_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} [\tilde{\Phi}(\mathbf{1}) - \tilde{f}(\mathbf{1})] = \tilde{\Phi}(\mathbf{1}) - \sup_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \tilde{f}(\mathbf{1}) = 0.$$

10.5.* Corollaire : $\|\tilde{\Phi}\|_* = \lim_{\tilde{f} \in \mathcal{A}} \|\tilde{f}\|_*$ (au sens d'une limite généralisée).

10.6.* Corollaire : Si \mathcal{A} est inclus à un sous-espace fermé de \mathcal{PM} , alors $\text{Sup } \mathcal{A}$ et $\text{Inf } \mathcal{A}$ appartiennent aussi à ce sous-espace.

10.7. Définition : Soit \mathcal{A} une partie de \mathcal{PM} dominée supérieurement. On pose

$$\mathcal{AA} = \{ \tilde{f}_1 \vee \tilde{f}_2 \vee \dots \vee \tilde{f}_n \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n \in \mathcal{A} \}.$$

Alors \mathcal{AA} est encore dominée supérieurement et de plus stable pour la loi \vee ;

on peut donc poser $\boxed{\text{Sup } \mathcal{A} = \text{Sup } \mathcal{AA}}$. Idem pour $\text{Inf } \mathcal{A}$.

CHAPITRE II

ESPACES DE RIESZ

Un *espace de Riesz* est un espace ordonné possédant une *valeur absolue* (à valeurs dans l'espace lui-même). \mathbb{R} en est l'exemple minimal et paradigmatique. De nombreux espaces de fonctions, les espaces \mathcal{PM} et \mathcal{L}^1 , ainsi que la plupart des espaces définis dans les chapitres suivants, sont des espaces de Riesz. L'intérêt primordial de cette structure est d'absorber efficacement dans un même formalisme les espaces de fonctions, de fonctionnelles, de mesures et de pseudo-mesures.

§ 1. Définition et propriétés

1.1. Définition : Un espace ordonné V est un espace de Riesz ss'il existe une application $|\cdot| : V \rightarrow V^+$, appelée valeur absolue, telle que

$$\boxed{\forall u \in V \quad \forall v \in V^+ \quad \left[|u| \leq v \Leftrightarrow -v \leq u \leq v \right]}.$$

1.2. Théorème : Dans un espace de Riesz V on a ($u, v \in V$)

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $- u \leq u \leq u$ 2) $u \geq 0 \Leftrightarrow u = u$ 3) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u = \lambda u$ 4) $u + v \leq u + v$ 5) $u - v \leq u - v$ |
|--|

Dém :

1) $\forall u \in V$ on a $|u| \in V^+$ et $|u| \leq |u|$, donc $-|u| \leq u \leq |u|$.

2) a) \Rightarrow : Soit $u \geq 0$; on a $-u \leq u \leq u$, donc $|u| \leq u$; or $u \leq |u|$, donc $u = |u|$.

b) \Leftarrow : Trivial.

3) $\forall u \in V$ on a $-|u| \leq u \leq |u|$, donc $-|u| \leq -u \leq |u|$, donc $|-u| \leq |u|$, donc aussi $|u| = | -(-u) | \leq |-u|$, donc $|-u| = |u|$.

D'autre part soit $\lambda > 0$; on a $-|u| \leq u \leq |u|$, donc $-\lambda|u| \leq \lambda u \leq \lambda|u|$,

or $\lambda|u| \in V^+$, donc $|\lambda u| \leq \lambda|u|$; on a donc aussi $\lambda|u| = \lambda|(1/\lambda)\lambda u|$

$\leq \lambda(1/\lambda)|\lambda u| = |\lambda u|$; donc $|\lambda u| = \lambda|u|$.

4) $\forall u, v \in V$ on a $-|u| - |v| \leq u + v \leq |u| + |v|$, donc $|u + v| \leq |u| + |v|$.

5) $\forall u, v \in V$ on a $|u| = |v + u - v| \leq |v| + |u - v|$; en intervertissant u et v on a $|v| \leq |u| + |u - v|$, donc $-|u - v| \leq |u| - |v| \leq |u - v|$, donc $||u| - |v|| \leq |u - v|$.

Exemples d'espaces de Riesz : \mathcal{E} , \mathcal{C} , \mathcal{R} , \mathcal{F} , \mathcal{L}^1 , \mathcal{M}_D , \mathcal{M} , \mathcal{PM} .

1.3. Théorème : Il existe au plus une valeur absolue dans un espace ordonné.

Dém : Soit V un espace ordonné et soient $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ deux valeurs absolues dans V ; on a $\forall u \in V$ $-|u|_1 \leq u \leq |u|_1$, donc $|u|_2 \leq |u|_1$; de même on trouve $|u|_1 \leq |u|_2$, donc $|u|_1 = |u|_2$.

Remarque : En dépit de sa simplicité, ce théorème est particulièrement intéressant puisqu'il nous apprend que la structure d'espace ordonné détermine déjà la structure d'espace de Riesz : un espace de Riesz est un espace ordonné dans lequel on peut définir une valeur absolue, avant même que d'être un espace ordonné dans lequel on a défini une valeur absolue.

1.4. Définition : Soit V un espace de Riesz; $\forall u, v \in V$ on pose

$$\boxed{u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|)} \quad \text{et} \quad \boxed{u \wedge v = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)}.$$

1.5. Définition : Soit V un espace de Riesz; $\forall u \in V$ on pose

$$\boxed{u^+ = u \vee 0 = \frac{1}{2}(|u| + u)} \quad \text{et} \quad \boxed{u^- = (-u)^+ = (-u) \vee 0 = \frac{1}{2}(|u| - u)}.$$

u^+ et u^- s'appellent la partie positive et la partie négative de u .

1.6. Théorème : Propriétés des lois \wedge et \vee dans un espace de Riesz V

$$(u, v, w, x \in V)$$

$$1) \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (\lambda u)^+ = \lambda u^+ \quad \text{et} \quad (\lambda u)^- = \lambda u^-$$

$$2) \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \lambda(u \wedge v) = (\lambda u) \wedge (\lambda v) \quad \text{et} \quad \lambda(u \vee v) = (\lambda u) \vee (\lambda v)$$

$$3) -(u \wedge v) = (-u) \vee (-v) \quad \text{et} \quad -(u \vee v) = (-u) \wedge (-v)$$

$$4) (u + v) \vee (u + w) = u + (u \vee w) \quad \text{et} \quad (u + v) \wedge (u + w) = u + (u \wedge w)$$

- 5) $u \wedge v \leq u \leq u \vee v$
- 6) $u \vee u = u \wedge u = u$ (idempotence)
- 7) $u \vee v = v \vee u$ et $u \wedge v = v \wedge u$ (commutativité)
- 8) $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$ et $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$ (associativité)
- 9) $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)$ et $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge (u \vee w)$ (distributivité)
- 10) $v \leq w \Rightarrow (u \vee v \leq u \vee w \text{ et } u \wedge v \leq u \wedge w)$ (monotonie)
- 11) $u \wedge v \leq u \leq u \vee v$
- 12) $(u \leq v \text{ et } u \leq w) \Rightarrow u \leq v \wedge w$ [$u \wedge v$ est la borne inférieure de u et v]
- 13) $(u \leq w \text{ et } v \leq w) \Rightarrow u \vee v \leq w$ [$u \vee v$ est la borne supérieure de u et v]
- 14) $u \leq v \Leftrightarrow u \wedge v = u$
- 15) $u \leq v \Leftrightarrow u \vee v = v$
- 16) $u \vee v + u \wedge v = u + v$ et $u \vee v - u \wedge v = |u - v|$
- 17) $u \vee (-u) = |u|$ et $u \wedge (-u) = -|u|$
- 18) $u^+ \wedge u^- = 0$
- 19) $u = u^+ - u^-$
- 20) $|u| = u^+ + u^- = u^+ \vee u^-$
- 21) $u \leq v \Leftrightarrow (u^+ \leq v^+ \text{ et } u^- \geq v^-)$
- 22) $2(u \wedge v)^+ \leq (u + v)^+ \leq u^+ + v^+$ et $2(u \vee v)^- \leq (u + v)^- \leq u^- + v^-$
- 23) $(u \wedge v)^+ = u^+ \wedge v^+$ et $(u \wedge v)^- = u^- \wedge v^-$
- 24) $(u \vee v)^+ = u^+ \vee v^+$ et $(u \vee v)^- = u^- \vee v^-$.
- 25) $u \vee v = u^+ \vee v^+ - u^- \wedge v^-$ et $u \wedge v = u^+ \wedge v^+ - u^- \vee v^-$
- 26) $|u \vee v| \leq |u| \vee |v|$ et $|u \wedge v| \leq |u| \vee |v|$
- 27) $|u + v| \vee |u - v| = |u| + |v|$
- 28) $|u| \wedge |v| = 0 \Rightarrow |u + v| = |u| + |v|$
- 29) $|u \vee v - w \vee x| \leq |u - w| + |v - x|$ et $|u \wedge v - w \wedge x| \leq |u - w| + |v - x|$

$$30) \quad u \leq w \Rightarrow u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w \stackrel{\text{déf}}{=} \boxed{u \vee v \wedge w}$$

$$31) \quad \forall u, v, w \in V^+ \quad u \wedge (v + w) \leq u \wedge v + u \wedge w$$

$$32) \quad \forall v, w \in V^+ \quad \left[(u = v - w \text{ et } v \wedge w = 0) \Leftrightarrow (v = u^+ \text{ et } w = u^-) \right].$$

On constate qu'on retrouve toutes les propriétés de l'ordre dans \mathbb{R} , sauf bien sûr celles liées à la *totalité* de cet ordre. A cette restriction près on peut donc énoncer : “ Si c'est vrai dans \mathbb{R} , c'est vrai dans un espace de Riesz ”.

Tous ces résultats sont de démonstration élémentaire (voir Zaanen [34]) et nous les utiliserons librement et abondamment dans la suite.

$$1.7. \quad \underline{\text{Théorème de balayage dans } \mathcal{L}^1} : \forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1 \text{ on a } \boxed{{}^1\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \wedge \tilde{f} = \tilde{f}}.$$

Dém : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g \in \mathcal{E}$ tel que $\|\tilde{f} - g\|_1 \leq \varepsilon$; on a $\forall \alpha > 0$

$$\|\alpha \wedge \tilde{f} - \tilde{f}\|_1 \leq \|\alpha \wedge \tilde{f} - \alpha \wedge g\|_1 + \|\tilde{f} - g\|_1 + \|\alpha \wedge g - g\|_1$$

$$\leq 2 \|\tilde{f} - g\|_1 + \|\alpha \wedge g - g\|_1 \leq 2\varepsilon + \|\alpha \wedge g - g\|_1; \text{ or } \forall \alpha \geq \|g\| \text{ on a } \alpha \wedge g = g;$$

donc $\forall \alpha \geq \|g\|$ on a $\|\alpha \wedge \tilde{f} - \tilde{f}\|_1 \leq 2\varepsilon$.

$$1.8.* \quad \underline{\text{Corollaire}} : \boxed{{}^1\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (-\alpha) \vee \tilde{f} \wedge \alpha = \tilde{f}}.$$

§ 2. Treillis

2.1. Définition I : Un ensemble ordonné E est un treillis ssi $\forall a, b \in E$ la paire $\{a, b\}$ possède un *majorant minimum* (noté $a \vee b$) et un *minorant maximum* (noté $a \wedge b$). On en déduit $\forall a, b \in T \quad \boxed{a \wedge b \leq a \leq a \vee b}$.

Remarque : Rappelons que, dans un ensemble ordonné, un élément est *minimum* s'il est inférieur à tous les autres (il est donc nécessairement unique); par contre un élément est *minimal* si aucun autre ne lui est inférieur, ce qui est une propriété plus faible qui n'assure pas l'unicité.

2.2. Définition équivalente II : Un ensemble E est un treillis ss'il existe deux lois de composition sur E , notées \vee et \wedge , *commutatives*, *associatives* et *idempotentes*, telles que $\boxed{\forall a, b \in E \quad [a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b]}$.

On peut alors définir un ordre sur E par la condition $\boxed{\forall a, b \in E \quad a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a}$.

Pour cet ordre \vee et \wedge constituent effectivement les opérations de “majorant minimum” et de “minorant maximum”.

2.3. Définition équivalente III : Un ensemble E est un treillis ssi il existe deux lois de composition sur E , notées \vee et \wedge , *commutatives* et *associatives*, vérifiant la propriété d'absorption $\boxed{\forall a, b \in E \quad a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a}$.

Remarque : La propriété d'absorption *à elle seule* implique déjà l'idempotence des lois \vee et \wedge ; en effet on peut alors écrire $\forall a \in T$

$$a \vee a = a \vee [a \wedge (a \vee a)] = a$$

$$a \wedge a = a \wedge [a \vee (a \wedge a)] = a.$$

2.4. Théorème fondamental

Un espace ordonné est un treillis ssi c'est un espace de Riesz.

Dém :

a) \Rightarrow : Soit V un espace ordonné possédant une structure de treillis ; on pose

$\boxed{\forall u \in V \quad |u| = u \vee (-u)}$; montrons que $| \cdot |$ est une valeur absolue sur V .

On a $\forall u \in V \quad |u| \geq u$ et $|u| \geq -u$, donc $2|u| \geq u + (-u) = 0$, donc $|u| \geq 0$.

D'autre part on peut écrire $\forall u \in V \quad \forall v \in V^+ : |u| \leq v \Leftrightarrow u \vee (-u) \leq v$

$$\Leftrightarrow (u \leq v \text{ et } -u \leq v)$$

$$\Leftrightarrow -v \leq u \leq v.$$

b) \Leftarrow : Conséquence des propriétés 6), 11), 12), 13).

§ 3. Sous-espaces d'un espace de Riesz

3.1. Définition : Soit V un espace de Riesz ; un sous-espace W de V est cohérent ssi W est stable pour les lois \vee et \wedge .

Remarque : W étant un sous-espace, la stabilité pour l'une des lois implique la stabilité pour l'autre.

3.2. Théorème : W est cohérent ssi $\forall u \in V$ on a $\boxed{u \in W \Rightarrow |u| \in W}$.

Dém : a) \Rightarrow : Si $u \in W$ on a $|u| = u \vee (-u) \in W$.

b) \Leftarrow : Si $u, v \in W$ on a $u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|) \in W$.

3.3.* Théorème : Soient V un espace de Riesz et W un sous-espace de V ; alors W est un espace de Riesz (pour la structure induite) ssi W est cohérent.

3.4.* Théorème :

\mathcal{M} et \mathcal{M}_D sont des sous-espaces cohérents et intégraux de \mathcal{PM} .

3.5. Théorème : Soient V un espace de Riesz et W un sous-espace de V cohérent et intégral ; alors V/W possède une structure naturelle d'espace de Riesz en définissant la valeur absolue par $\forall \hat{u} \in V/W \quad |\hat{u}| = \widehat{|u|}$, c-à-d $|u + W| = |u| + W$.

Dém : Montrons d'abord que cette définition est indépendante des représentants choisis, c-à-d que $\forall u, v \in V \quad (\hat{u} = \hat{v} \Rightarrow \widehat{|u|} = \widehat{|v|})$, c-à-d encore $\forall u, v \in V \quad (u - v \in W \Rightarrow |u| - |v| \in W)$. Soient donc $v \in V$ et $w \in W$; il faut montrer que $|v + w| - |v| \in W$; or on a $-|w| \leq |v + w| - |v| \leq |w|$; de plus $|w| \in W$ car W est cohérent ; on en déduit $|v + w| - |v| \in W$ car W est intégral.

Démontrons ensuite que $|\cdot|$ est bien une valeur absolue sur V/W , c-à-d que

$$\forall \hat{u} \in V/W \quad \forall \hat{v} \in (V/W)^+ \quad [|\hat{u}| \leq \hat{v} \Leftrightarrow -\hat{v} \leq \hat{u} \leq \hat{v}].$$

a) \Rightarrow : Supposons $|\hat{u}| \leq \hat{v}$; alors il existe $w \in W$ tel que $|u| \leq v + w$, c-à-d $-v - w \leq u \leq v + w$; on en déduit $-v \leq u + w$ et $u \leq v + w$, donc $-\hat{v} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$.

b) \Leftarrow : Supposons $-\hat{v} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$; alors il existe $w_1, w_2 \in W$ tels que $-v \leq u + w_1$ et $u \leq v + w_2$; on en déduit $-v - w_1 \leq u \leq v + w_2$, donc $-v - (w_1 \vee w_2) \leq u \leq v + (w_1 \vee w_2)$, donc $|u| \leq v + (w_1 \vee w_2)$, donc $|\hat{u}| \leq \hat{v}$.

§ 4. Domaines de Riesz sur un espace de Riesz

4.1. Définition :

Soient A et V deux espaces de Riesz ; on dit que V est un domaine de Riesz sur A ss'il est muni d'une multiplication externe bilinéaire $A \times V \rightarrow V : (a, u) \mapsto a u$

telle que $\forall a \in A \quad \forall u \in V \quad |a u| = |a| |u|$.

4.2. Théorème : Dans un domaine de Riesz V sur A on a

- 1) $\forall a \in A^+ \quad \forall u \in V^+ \quad a u \in V^+$
- 2) $\forall a, b \in A^+ \quad \forall u, v \in V^+ \quad [(a \leq b \text{ et } u \leq v) \Rightarrow a u \leq b v]$
- 3) $\forall a, b \in A \quad \forall u \in V^+ \quad (a \wedge b) u = (a u) \wedge (b u) \text{ et } (a \vee b) u = (a u) \vee (b u)$
- 4) $\forall a \in A^+ \quad \forall u, v \in V \quad a (u \wedge v) = (a u) \wedge (a v) \text{ et } a (u \vee v) = (a u) \vee (a v)$

Dém :

- 1) $a u = |a| |u| = |a u| \in V^+$.
- 2) $(b - a) u \geq 0$, donc $b u \geq a u$; de même $b(v - u) \geq 0$, donc $b v \geq b u$;
donc $b v \geq b u \geq a u$.
- 3) $(a \wedge b) u = \frac{1}{2} (a + b - |a - b|) u = \frac{1}{2} (a u + b v - |a - b| u)$
 $= \frac{1}{2} (a u + b v - |(a - b) u|) = \frac{1}{2} (a u + b v - |a u - b u|) = (a u) \wedge (b u)$.
- 4) Idem.

Exemples : $\mathcal{R}, \mathcal{L}^1, \mathcal{M}_D, \mathcal{M}, \mathcal{PM}$ sont des domaines de Riesz sur \mathcal{R} .

§ 5. Espaces semi-normés de Riesz

5.1. Définition : Un espace de Riesz V muni d'une semi-norme (resp. norme) $\| \cdot \|_s$ est un espace semi-normé (resp. normé) de Riesz ssi

$$\boxed{\forall u, v \in V \quad |u| \leq |v| \Rightarrow \|u\|_s \leq \|v\|_s}.$$

5.2. Théorème : Dans un espace semi-normé de Riesz V on a ($u, v \in V$)

- 1) $|u| = |v| \Rightarrow \|u\|_s = \|v\|_s$
- 2) $\| |u| \|_s = \|u\|_s$
- 3) $\| |u| - |v| \|_s \leq \|u - v\|_s$

Dém : C'est trivial ; démontrons par exemple 2) : on a $\forall u \in V \quad \| |u| \| = |u|$,
donc $\| |u| \|_s = \|u\|_s$.

5.3.* Théorème : Un espace normé de Riesz est archimédien.

5.4. Définition : Un espace normé de Riesz V est un espace de Riesz-Banach (ou

treillis de Banach) ssi V est complet pour la norme. Si de plus V est un espace de Hilbert on parle d'un espace de Riesz-Hilbert.

Exemples d'espaces de Riesz-Banach :

$(\mathcal{C}, | \cdot |, \| \cdot \|)$, $(\mathcal{F}, | \cdot |, \| \cdot \|)$, $(\mathcal{L}^1, | \cdot |, \| \cdot \|_1)$, $(\mathcal{M}, | \cdot |, \| \cdot \|_*)$, $(\mathcal{PM}, | \cdot |, \| \cdot \|_*)$.

§ 6. N-dual d'un espace semi-normé de Riesz

Nous nous proposons de généraliser à un espace semi-normé de Riesz quelconque la construction qui nous a permis d'obtenir \mathcal{PM} à partir de \mathcal{E} .

6.1. Définition : Soit V un espace semi-normé de Riesz et soit V^* le N-dual de V ; V^* est un espace de Banach pour la norme duale $\| \cdot \|_*$ définie par

$$\forall \phi \in V^* \quad \|\phi\|_* = \sup_{u \in V, \|u\|=1} |\phi(u)| = \sup_{u \in V, \|u\| \leq 1} |\phi(u)|$$

6.2. Définition : On définit un ordre dans V^* de la manière suivante :

$$\forall \phi, \psi \in V^* \quad \text{on pose} \quad \boxed{\phi \leq \psi \quad \text{ssi} \quad \forall u \in V^+ \quad \phi(u) \leq \psi(u)}.$$

6.3. * Théorème : V^* est un espace ordonné.

6.4. Définition : On pose $\forall \phi \in V^*$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall u \in V^+ \quad |\phi|(u) &= \sup_{v \in V, |v| \leq u} \phi(v) = \sup_{v \in V, |v| \leq u} |\phi(v)| \\ \bullet \quad \forall u \in V \quad |\phi|(u) &= |\phi|(u^+) - |\phi|(u^-) \end{aligned}$$

6.5. Théorème : $| \cdot |$ est une valeur absolue sur V^* , qui est donc un espace de Riesz.

Dém : Identique à la démonstration faite dans le cas de \mathcal{PM} .

6.6. Théorème : $\forall \phi \in V^* \quad \forall u \in V \quad \text{on a} \quad |\phi(u)| \leq |\phi|(|u|)$.

Dém : Identique à la démonstration faite dans le cas de \mathcal{PM} .

6.7. Théorème : $\forall \phi \in V^* \quad \text{on a} \quad \boxed{\| |\phi| \|_* = \|\phi\|_*}$.

Dém : Soit $\phi \in V^*$; on a $\|\phi\|_* = \sup_{u \in V, \|u\|=1} |\phi(u)| \leq \sup_{u \in V, \|u\|=1} |\phi(|u|)$
 $= \sup_{u \in V^+, \|u\|=1} |\phi|(u) = \|\phi\|_*$; on a donc $\|\phi\|_* \leq \|\phi\|_*$; soit $\varepsilon > 0$;
choisissons $u \in V^+$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|\phi\|_* \leq |\phi|(u) + \varepsilon$; choisissons ensuite
 $v \in V$ tel que $|v| \leq u$ et $|\phi|(u) \leq |\phi(v)| + \varepsilon$; on a donc $\|\phi\|_* \leq |\phi(v)| + 2\varepsilon$;
or $|v| \leq u$, donc $\|v\| \leq \|u\| = 1$, donc $|\phi(v)| \leq \|\phi\|_*$, donc $\|\phi\|_* \leq \|\phi\|_* + 2\varepsilon$;
on en déduit $\|\phi\|_* \leq \|\phi\|_*$.

6.8.* Corollaire : $\forall \phi, \psi \in V^*$ on a $|\phi| \leq |\psi| \Rightarrow \|\phi\|_* \leq \|\psi\|_*$.

Dém : $\|\phi\|_* = \|\phi\|_* = \sup_{u \in V, \|u\|=1} |\phi|(u) = \sup_{u \in V, \|u\|=1} |\phi|(u^+) - |\phi|(u^-)|$
 $= \sup_{u \in V^+, \|u\|=1} |\phi|(u) \leq \sup_{u \in V^+, \|u\|=1} |\psi|(u) = \|\psi\|_*$.

En conclusion on obtient le

6.9.* Théorème :

Le N-dual d'un espace semi-normé de Riesz est un espace de Riesz-Banach.

§ 7. Quotient d'un espace de (Riesz-)Banach

7.1. Théorème : Soit W un sous-espace fermé de l'espace de Banach $(V, \|\cdot\|)$;
on définit sur l'espace quotient V/W la norme $\|\widehat{u}\|_\bullet = \inf_{w \in W} \|u + w\|$; alors V/W
est complet pour cette norme et constitue donc un espace de Banach.

Dém : Démontrons d'abord que $\|\cdot\|_\bullet$ est bien une norme sur V/W .

- 1) Soit $\widehat{u} \in V/W$ tel que $\|\widehat{u}\|_\bullet = 0$; il existe donc une suite $w_n \in W$ telle que
 $\|u + w_n\| \rightarrow 0$, c-à-d $-w_n \rightarrow u$, donc $u \in W$, c-à-d $\widehat{u} = 0$.
- 2) $\|\lambda \widehat{u}\|_\bullet = \|\widehat{\lambda u}\|_\bullet = \inf_{w \in W} \|\lambda u + w\| = |\lambda| \inf_{w \in W} \|u + w/\lambda\| = |\lambda| \inf_{w \in W} \|u + w\| = |\lambda| \|\widehat{u}\|_\bullet$.
- 3) Soient $\widehat{u}, \widehat{v} \in V/W$ et soit $\varepsilon > 0$; il existe $w_1, w_2 \in W$ tels que
 $\|u + w_1\| \leq \|\widehat{u}\|_\bullet + \varepsilon$ et $\|v + w_2\| \leq \|\widehat{v}\|_\bullet + \varepsilon$; on peut donc écrire
 $\|\widehat{u} + \widehat{v}\|_\bullet = \|\widehat{u+v}\|_\bullet = \inf_{w \in W} \|u + v + w\| \leq \|u + v + w_1 + w_2\|$
 $\leq \|u + w_1\| + \|v + w_2\| \leq \|\widehat{u}\|_\bullet + \|\widehat{v}\|_\bullet + 2\varepsilon$;

comme ε est arbitraire, on a bien $\|\widehat{u} + \widehat{v}\|_{\bullet} \leq \|\widehat{u}\|_{\bullet} + \|\widehat{v}\|_{\bullet}$.

Remarquons en passant que $\forall u \in V$ $\boxed{\|\widehat{u}\|_{\bullet} \leq \|u\|}$.

Montrons maintenant que V/W est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\bullet}$.

Soit $\widehat{u}_n \in V/W$ une suite de Cauchy ; il existe donc une suite strictement croissante

$n_i \in \mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_i \quad \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_{n_i}\|_{\bullet} \leq \frac{1}{2^i}$; on a en particulier

$\forall i \in \mathbb{N} \quad \|\widehat{u}_{n_{i+1}} - \widehat{u}_{n_i}\|_{\bullet} \leq \frac{1}{2^i}$; il existe donc une suite $w_i \in W$ telle que

$\forall i \in \mathbb{N} \quad \|u_{n_{i+1}} - u_{n_i} + w_i\| \leq \frac{2}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}$; posons $\forall i \in \mathbb{N} \quad v_i = u_{n_i} + \sum_{k=0}^{i-1} w_k$;

on a $\forall i \in \mathbb{N} \quad \|v_{i+1} - v_i\| = \|u_{n_{i+1}} - u_{n_i} + w_i\| \leq \frac{1}{2^{i-1}}$,

donc $\forall j > i \quad \|v_j - v_i\| \leq \sum_{k=i}^{j-1} \|v_{k+1} - v_k\| \leq \sum_{k=i}^{j-1} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{i-2}}$;

donc v_i est une suite de Cauchy dans V ; soit $v \in V$ sa limite ; on a $\forall i \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_i \quad \|\widehat{u}_n - \widehat{v}\|_{\bullet} \leq \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_{n_i}\|_{\bullet} + \|\widehat{u}_{n_i} - \widehat{v}\|_{\bullet} = \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_{n_i}\|_{\bullet} + \|\widehat{v}_i - \widehat{v}\|_{\bullet}$

$\leq \|\widehat{u}_n - \widehat{u}_{n_i}\|_{\bullet} + \|v_i - v\| \leq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-2}} \leq \frac{1}{2^{i-3}}$; donc $\widehat{u}_n \rightarrow \widehat{v}$.

7.2. Définition : Soient V_1, V_2 des sous-espaces fermés de V tels que $V = V_1 \oplus V_2$;

supposons $\forall v_1 \in V_1 \quad \inf_{v \in V_2} \|v_1 + v\| = \|v_1\|$ et $\forall v_2 \in V_2 \quad \inf_{v \in V_1} \|v_2 + v\| = \|v_2\|$;

alors on dit que la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ est normale.

Remarque : Une décomposition quelconque $V = V_1 \oplus V_2$ vérifie déjà trivialement

$$\forall v_1 \in V_1 \quad \inf_{v \in V_2} \|v_1 + v\| \leq \|v_1\| \quad \text{et} \quad \forall v_2 \in V_2 \quad \inf_{v \in V_1} \|v_2 + v\| \leq \|v_2\|.$$

7.3. Théorème : Soient V_1, V_2 des sous-espaces fermés de V tels que $V = V_1 \oplus V_2$;

soient π_1 et π_2 les projections associées à cette décomposition ; alors la décomposition

$V = V_1 \oplus V_2$ est normale ssi

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow V_2 : u + V_1 \mapsto \pi_2(u) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_2 \rightarrow V_1 : u + V_2 \mapsto \pi_1(u)$$

sont des isométries bijectives.

Dém :

$$\|u + V_1\|_{\bullet} = \inf_{v \in V_1} \|u + v\| = \inf_{v \in V_1} \|\pi_1(u) + \pi_2(u) + v\| = \inf_{v \in V_1} \|\pi_2(u) + v\| ;$$

donc $\|u + V_1\|_{\bullet} = \|\pi_2(u)\|$ et $\|u + V_2\|_{\bullet} = \|\pi_1(u)\|$ ssi la décomposition

$V = V_1 \oplus V_2$ est normale.

7.4. Définition :

Soit V un espace de Riesz-Banach ; on dit qu'un sous-espace W de V est total ssi W est cohérent, intégral et fermé.

7.5. Théorème : Soient V un espace de Riesz-Banach et W un sous-espace total de V ; alors V/W possède naturellement une structure d'espace de Riesz-Banach.

Dém : V/W possède une structure d'espace de Riesz d'après le Théorème II 3.5 et une structure d'espace de Banach d'après le Théorème II 7.1 ; il reste donc à montrer que V/W est bien un espace de Riesz-Banach, c-à-d que

$$\forall \hat{u}, \hat{v} \in V/W \quad \left[|\hat{u}| \leq |\hat{v}| \Rightarrow \|\hat{u}\|_{\bullet} \leq \|\hat{v}\|_{\bullet} \right],$$

c-à-d encore

$$\forall u, v \in V \quad \forall w \in W \quad \left[|u| \leq |v| + w \Rightarrow \inf_{x \in W} \|u + x\| \leq \inf_{x \in W} \|v + x\| \right].$$

La démonstration utilise plusieurs lemmes.

Lemme 1 : $\forall u, v \in V \quad |u| - |u| \wedge |v| \leq |u + v|$.

Dém : $|u| - |u + v| \leq |u|$ et $|u| - |u + v| \leq |v|$, donc $|u| - |u + v| \leq |u| \wedge |v|$.

Lemme 2 : $\forall u, v \in V \quad ||u| + v| \geq |u - (u^+ \wedge |v| - u^- \wedge |v|)|$.

Dém : En appliquant le Lemme 1 à $|u|$ et v on obtient

$$\begin{aligned} |u| - |u| \wedge |v| &\leq ||u| + v| ; \text{ or } |u| - |u| \wedge |v| = u^+ + u^- - u^+ \wedge |v| - u^- \wedge |v| \\ &= (u^+ - u^+ \wedge |v|) + (u^- - u^- \wedge |v|) = |(u^+ - u^+ \wedge |v|) - (u^- - u^- \wedge |v|)| \\ &= |u - (u^+ \wedge |v| - u^- \wedge |v|)| ; \text{ donc } ||u| + v| \geq |u - (u^+ \wedge |v| - u^- \wedge |v|)|. \end{aligned}$$

Lemme 3 : $\forall u \in V \quad ||\hat{u}|_{\bullet} = \|\hat{u}\|_{\bullet}$, c-à-d $\inf_{w \in W} ||u| + w| = \inf_{w \in W} \|u + w\|$.

Dém : Soit $u \in V$; d'après le Lemme 1 on a $\forall w \in W$

$$0 \leq |u| - |u| \wedge |w| \leq |u + w|, \text{ donc } ||u| - |u| \wedge |w|| \leq \|u + w\|,$$

donc $\inf_{x \in W} ||u| + x| \leq \inf_{w \in W} ||u| - |u| \wedge |w|| \leq \inf_{w \in W} \|u + w\|$; d'autre part d'après

le Lemme 2 $\inf_{w \in W} ||u| + w| \geq \inf_{w \in W} |u - (u^+ \wedge |w| - u^- \wedge |w|)| \geq \inf_{x \in W} \|u + x\|$.

Lemme 4 : $\forall u, v \in V^+ \quad \left[u \leq v \Rightarrow \|\hat{u}\|_{\bullet} \leq \|\hat{v}\|_{\bullet} \right],$

c-à-d $\forall u, v \in V^+ \quad \left[u \leq v \Rightarrow \inf_{x \in W} \|u + x\| \leq \inf_{y \in W} \|v + y\| \right].$

Dém :

En appliquant le Lemme 1 on obtient $\forall u, v \in V^+$ tels que $u \leq v$ et $\forall w \in W$
 $0 \leq u - u \wedge |w| \leq v - v \wedge |w| \leq |v + w|$, donc $\|u - u \wedge |w|\| \leq \|v + w\|$;
donc $\inf_{x \in W} \|u + x\| \leq \inf_{w \in W} \|u - u \wedge |w|\| \leq \inf_{w \in W} \|v + w\|$.

Fin de la démonstration du théorème :

Soient $u, v \in V$ et $w \in W$ tels que $|u| \leq |v| + w$; alors on a
 $\|\widehat{u}\|_{\bullet} = \|\widehat{|u|}\|_{\bullet} \leq \|\widehat{|v| + w}\|_{\bullet} = \|\widehat{|v|}\|_{\bullet} = \|\widehat{v}\|_{\bullet}$.

§ 8. Morphismes et isométries de Riesz

8.1. Définition : Soient V et V' deux espaces de Riesz ; l'application linéaire
 $\phi : V \rightarrow V'$ est un morphisme de Riesz ssi $\forall u \in V \quad |\phi(u)| = \phi(|u|)$.

8.2.* Théorème : Si $\phi : V \rightarrow V'$ est un morphisme de Riesz on a ($u, v \in V$)

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $u \geq 0 \Rightarrow \phi(u) \geq 0$ 2) $u \leq v \Rightarrow \phi(u) \leq \phi(v)$ 3) $\phi(u \wedge v) = \phi(u) \wedge \phi(v)$ 4) $\phi(u \vee v) = \phi(u) \vee \phi(v)$ |
|--|

Si l'application linéaire ϕ vérifie seulement les conditions 1) et 2), d'ailleurs clairement équivalentes, on dit que ϕ est croissante.

Exemples :

$\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^+$ l'application $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{PM} : f \mapsto f \cdot \tilde{\mu}$ est un morphisme de Riesz.

$\forall f \in \mathcal{R}^+$ l'application $\mathcal{PM} \rightarrow \mathcal{PM} : \tilde{\mu} \mapsto f \cdot \tilde{\mu}$ est un morphisme de Riesz.

8.3. Définition : Soient V et V' deux espaces semi-normés de Riesz ; le morphisme de Riesz $\phi : V \rightarrow V'$ est une isométrie de Riesz ssi $\forall u \in V \quad \|\phi(u)\|_s = \|u\|_s$.

Si V et V' sont des espaces de Riesz-Banach on parle d'une isométrie de Riesz-Banach.
Une isométrie de Riesz-Banach est toujours *injective*, mais pas nécessairement *bijective*.

FONCTIONS POSITIVES SEMI-CONTINUES SUPERIEUREMENT

Les fonctions *positives semi-continues supérieurement* constituent l'outil théorique indispensable à la démonstration du théorème de *convergence dominée* de Lebesgue. En particulier le théorème de *semi-complétude* de l'ensemble de ces fonctions est à la base du théorème de *complétude* de l'espace des fonctions *universelles*.

1. Définition : Une fonction $f \in \widehat{\mathcal{F}}^+$ est semi-continue supérieurement (scs) ssi

$$\boxed{\forall c \in [a, b] \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) \leq f(c)}.$$

2. Théorème : Si $f \in \widehat{\mathcal{F}}^+$ est scs, alors f est bornée, c-à-d $f \in \mathcal{F}^+$, et f atteint sa borne supérieure.

Dém : Supposons que f ne soit pas bornée et soit une suite $x_n \in [a, b]$ telle que $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Par compacité de $[a, b]$, il existe une sous-suite $x_{n'}$ qui est convergente ; posons $c = \lim x_{n'}$; alors on a $+\infty = \lim f(x_{n'}) \leq f(c)$, ce qui est contradictoire. Soit M la borne supérieure de f ; alors il existe une suite $x_n \in [a, b]$ telle que $f(x_n) \rightarrow M$. Par compacité de $[a, b]$, il existe une sous-suite $x_{n'}$ qui est convergente ; posons $c = \lim x_{n'}$; alors on a $M = \lim f(x_{n'}) \leq f(c)$, donc $f(c) = M$.

On note $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{F}^+ \mid f \text{ scs}\}$, $\mathcal{ES} = \{f \in \mathcal{E}^+ \mid f \text{ scs}\} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$
et $\mathcal{RS} = \{f \in \mathcal{R}^+ \mid f \text{ scs}\} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

On a clairement $\boxed{\mathcal{ES} \subset \mathcal{RS} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{F}^+}$ et $\boxed{\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{RS}}$.

3. Théorème : \mathcal{ES} , \mathcal{RS} et \mathcal{S} sont stables pour les lois $+$, " \cdot ", \vee , \wedge et pour la multiplication par un réel positif.

Dém : Il suffit de montrer le théorème pour \mathcal{S} :

- a) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f + g$; on a $\forall c \in [a, b] \quad \overline{\lim}_c h \leq (\overline{\lim}_c f) + (\overline{\lim}_c g) \leq f(c) + g(c) = h(c)$.
- b) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f g$; on a $\forall c \in [a, b] \quad \overline{\lim}_c h \leq (\overline{\lim}_c f) (\overline{\lim}_c g) \leq f(c) g(c) = h(c)$.
- c) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f \vee g$; on a $\forall c \in [a, b] \quad \overline{\lim}_c h = (\overline{\lim}_c f) \vee (\overline{\lim}_c g) \leq f(c) \vee g(c) = h(c)$.

d) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et posons $h = f \wedge g$; on a $\forall c \in [a, b] \quad \overline{\lim}_c h \leq \overline{\lim}_c f \leq f(c)$; de même $\overline{\lim}_c h \leq g(c)$; donc $\overline{\lim}_c h \leq f(c) \wedge g(c) = h(c)$.

e) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $\lambda \geq 0$; on a $\forall c \in [a, b] \quad \overline{\lim}_c \lambda f = \lambda \overline{\lim}_c f \leq \lambda f(c)$.

4. Théorème : Soit $f \in \mathcal{F}^+$; alors $f \in \mathcal{S}$ ssi $\forall \alpha > 0$ l'ensemble

$\boxed{\{x \in [a, b] \mid f(x) < \alpha\}}$ est ouvert dans $[a, b]$.

Dém :

a) \Rightarrow : Soit $\alpha > 0$; il faut montrer que l'ensemble $E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < \alpha\}$ est ouvert dans $[a, b]$; soit $c \in E$; comme $f(c) < \alpha$ il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in I \quad f(x) < f(c) + [\alpha - f(c)] = \alpha$; donc $I \subset E$, ce qui montre que E est ouvert.

b) \Leftarrow : Soit $c \in [a, b]$; il faut montrer que $\overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) \leq f(c)$, c-à-d que $\forall \alpha > 0$ il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in I \quad f(x) < f(c) + \alpha$; soit $\alpha > 0$ et soit $E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < f(c) + \alpha\}$; E est ouvert et $c \in E$; il existe donc bien un intervalle ouvert $I \subset [a, b]$ tel que $c \in I \subset E$.

5. Théorème de semi-complétude de \mathcal{S}

$\boxed{\text{Soit } f_n \in \mathcal{S}, f_n \text{ suite décroissante, } f_n \xrightarrow{\circ} f \in \mathcal{F}^+; \text{ alors } f \in \mathcal{S} .}$

Dém : Posons $f = \inf_n f_n \in \mathcal{F}^+$; soit $c \in [a, b]$; on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{\lim}_c f \leq \overline{\lim}_c f_n \leq f_n(c)$; donc $\overline{\lim}_c f \leq \inf_n f_n(c) = f(c)$.

Enoncé équivalent : $\boxed{\text{Pour toute suite } f_n \in \mathcal{S} \text{ on a } \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{S} .}$

6. Théorème de convergence uniforme dans \mathcal{S} (Généralisation du théorème de Dini)

$\boxed{\text{Soit } f_n \in \mathcal{S}, f_n \text{ suite décroissante, } f_n \xrightarrow{\circ} 0; \text{ alors } f_n \xrightarrow{\mathbf{u}} 0 .}$

Dém : Soit $\varepsilon > 0$; on pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad E_n = \{x \in [a, b] \mid f_n(x) < \varepsilon\}$; on a

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad E_n$ est ouvert dans $[a, b]$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad E_n \subset E_{n+1}$

c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = [a, b]$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $E_N = [a, b]$; donc $\forall x \in [a, b]$ $f_N(x) < \varepsilon$;
donc $f_n \xrightarrow{u} 0$.

7. Théorème de stabilité (Riesz-Nagy [26] p. 34)

Soit \mathcal{A} une partie de \mathcal{F}^+ stable pour la loi \wedge ; on note \mathcal{A}_\downarrow l'ensemble de toutes les fonctions de \mathcal{F}^+ qui sont limites simples de suites **décroissantes** de \mathcal{A} ; alors on a

1) \mathcal{A}_\downarrow est stable pour la loi \wedge

2) $\boxed{(\mathcal{A}_\downarrow)_\downarrow = \mathcal{A}_\downarrow}$

3) Si \mathcal{A} est stable pour les lois $+$, " \cdot ", \vee ou pour la multiplication par un réel positif, il en est de même de \mathcal{A}_\downarrow .

Dém :

1) Soient $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ des suites décroissantes ;

posons $f = \inf_n f_n \in \mathcal{A}_\downarrow$ et $g = \inf_n g_n \in \mathcal{A}_\downarrow$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq f_n \wedge g_n - f \wedge g \leq (f_n - f) + (g_n - g)$,

donc $f \wedge g = \inf_n (f_n \wedge g_n) \in \mathcal{A}_\downarrow$.

2) Soit $f_n \in \mathcal{A}_\downarrow$ une suite décroissante et posons $f = \inf_n f_n \in \mathcal{F}^+$; .

soit $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_{nk} \in \mathcal{A}$ une suite décroissante telle que $f_n = \inf_k f_{nk}$; .

posons $\forall k \in \mathbb{N}$ $g_k = f_{0k} \wedge f_{1k} \wedge \dots \wedge f_{kk} \in \mathcal{A}$; la suite g_k est décroissante ,

donc $g = \inf_k g_k \in \mathcal{A}_\downarrow$; alors

a) on a $\forall k \in \mathbb{N}$ $g_k \geq f_0 \wedge f_1 \dots \wedge f_k = f_k$; donc $g \geq f$;

b) on a $\forall n \leq k$ $g_k \leq f_{nk}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $g \leq f_n$; donc $g \leq f$.

En conclusion $f = g \in \mathcal{A}_\downarrow$.

3) Evident.

Remarque :

Le théorème de semi-complétude de \mathcal{S} peut s'exprimer sous la forme $\boxed{\mathcal{S}_\downarrow = \mathcal{S}}$.

8.* Lemme : Soit F un *intervalle* fermé de $[a, b]$; alors $\mathbb{1}_F \in \mathcal{ES}$.

9. Théorème : Soit F un fermé de $[a, b]$; alors $\boxed{\mathbb{1}_F \in (\mathcal{ES})_\downarrow}$.

Dém :

Soit Ω l'ouvert complémentaire de F dans $[a, b]$; on peut écrire $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$
avec $\Omega_n =$ réunion (finie) des intervalles maximaux de Ω de longueur $\geq \frac{1}{n}$.

Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ F_n le complémentaire de Ω_n dans $[a, b]$; alors on a

- a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{1}_{F_n} \in \mathcal{ES}$ car F_n est une réunion finie d'intervalles fermés de $[a, b]$.
- b) la suite $\mathbb{1}_{F_n}$ est décroissante car la suite Ω_n est croissante ; .
- c) $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$, donc $\mathbb{1}_F = \inf_n \mathbb{1}_{F_n}$.

En conclusion $\mathbb{1}_F \in (\mathcal{ES})_\downarrow$.

10. Théorème : $\boxed{(\mathcal{ES})_\downarrow = \mathcal{S}}$.

Dém : On a déjà $(\mathcal{ES})_\downarrow \subset \mathcal{S}_\downarrow = \mathcal{S}$. Il reste à montrer l'inclusion opposée.

Soit $f \in \mathcal{S}$; en considérant éventuellement $f/\|f\|$ on peut supposer $f \leq 1$;

on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall k \in [[0, n]]$ $F_{nk} = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq k/n\}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{F_{nk}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall k \in [[0, n]]$ F_{nk} est un fermé de $[a, b]$, donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n \in (\mathcal{ES})_\downarrow$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall k \in [[0, n]]$ $\forall x \in [a, b]$ on a

$k/n \leq f(x) < (k+1)/n \Rightarrow f_n(x) = (k+1)/n > f(x)$; donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$f \leq f_n$ et $\|f_n - f\| \leq \frac{1}{n}$; on en déduit $f_n \xrightarrow{u} f$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$

$g_n = f_0 \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_n \in (\mathcal{ES})_\downarrow$; la suite g_n est décroissante et on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f \leq g_n \leq f_n$; donc $g_n \xrightarrow{u} f$, donc $f \in [(\mathcal{ES})_\downarrow]_\downarrow = (\mathcal{ES})_\downarrow$.

THEOREME DE LEBESGUE SUR $[a,b]$

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème de *convergence dominée presque partout* sur $[a,b]$. En fait nous démontrons un théorème de *convergence bornée partout* sur $[a,b]$, que nous appelons simplement *théorème de Lebesgue* ; nous expliquons à la fin du chapitre pourquoi, malgré les apparences, il n'y a aucune perte de généralité.

Chemin faisant nous construisons deux extensions successives fondamentales de l'espace des fonctions réglées : d'abord l'espace des fonctions *pseudo-réglées*, puis l'espace des fonctions *universelles*.

§ 1. Théorème de Lebesgue dans \mathcal{R}

1.1. Lemme : Soient deux suites $\tilde{\phi}_n, \tilde{\psi}_n \in \mathcal{PM}^+$; alors on a

$$\boxed{\text{Inf}_n \tilde{\psi}_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\psi}_n - \tilde{\phi}_n| + \text{Inf}_n \tilde{\phi}_n}$$

Dém : On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0 \wedge \tilde{\psi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\psi}_n &\leq |\tilde{\psi}_0 \wedge \tilde{\psi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\psi}_n - \tilde{\phi}_0 \wedge \tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_n| + \tilde{\phi}_0 \wedge \tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_n \\ &\leq \sum_{r=0}^n |\tilde{\psi}_r - \tilde{\phi}_r| + \tilde{\phi}_0 \wedge \tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_n ; \end{aligned}$$

on en déduit $\text{Inf}_n \tilde{\psi}_n \leq \sum_{r=0}^{\infty} |\tilde{\psi}_r - \tilde{\phi}_r| + \text{Inf}_n \tilde{\phi}_n$.

1.2. Lemme de convergence fine dans \mathcal{RS}

Soit une suite $f_n \in \mathcal{RS}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^+$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$; en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) = \|f_n \tilde{\mu}\|_{\star} \rightarrow 0$.

Dém : La suite $f_n \tilde{\mu}$ est dominée car la suite f_n est bornée ; soit $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\psi}_n = \text{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p} \tilde{\mu}) \in \mathcal{M}^+ ; \text{ il faut démontrer } \tilde{\psi}_n \xrightarrow{\star} 0 . \text{ Posons } \forall n, p \in \mathbb{N}$$

$$g_{np} = f_n \vee f_{n+1} \vee \dots \vee f_{n+p} \in \mathcal{RS} ; \text{ on a } g_{np} \tilde{\mu} = (f_n \tilde{\mu}) \vee (f_{n+1} \tilde{\mu}) \vee \dots \vee (f_{n+p} \tilde{\mu}) ,$$

donc pour n fixé $g_{np} \tilde{\mu} \xrightarrow{\star} \tilde{\psi}_n$ quand $p \rightarrow +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; choisissons $\forall n \in \mathbb{N}$ un indice $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{\psi}_n - g_{np} \tilde{\mu}\|_{\star} \leq \varepsilon_n$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n = g_{np} \in \mathcal{RS}$;

on a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\tilde{\psi}_n - g_n \tilde{\mu}\|_* \leq \varepsilon_n$; d'autre part $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $g_n \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p}$;
or quand $n \rightarrow +\infty$ on a $\sup_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \xrightarrow{\circ} \overline{\lim}_n f_n = 0$, donc $g_n \xrightarrow{\circ} 0$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad h_n = g_0 \wedge g_1 \wedge \dots \wedge g_n \in \mathcal{RS}$; on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad h_n \leq g_n$,
donc $h_n \xrightarrow{\circ} 0$; de plus la suite h_n est décroissante, donc $h_n \xrightarrow{u} 0$, donc $h_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$;
on peut dès lors écrire $\text{Inf}_n (g_n \tilde{\mu}) = \text{Inf}_n (h_n \tilde{\mu}) = 0$.

En appliquant le lemme précédent on obtient donc

$$\|\text{Inf}_n \tilde{\psi}_n\|_* \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{\psi}_n - g_n \tilde{\mu}\|_* + \|\text{Inf}_n (g_n \tilde{\mu})\|_* \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon ;$$

comme ε est arbitraire on en déduit $\text{Inf}_n \tilde{\psi}_n = 0$.

1.3. Lemme d'approximation dans \mathcal{E}^+

$\forall f \in \mathcal{E}^+ \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad \forall \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{ES}$ tel que $g \leq f$ et $\tilde{\mu}(f - g) \leq \varepsilon$.

Dém : Soit $f \in \mathcal{E}^+$ et $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$; on construit $g \in \mathcal{ES}$ de la manière suivante :
on annule f dans des intervalles ouverts contenant les points de discontinuité de f ,
sans changer les valeurs de f aux points de discontinuité eux-mêmes ; on obtient ainsi
une fonction $g \in \mathcal{ES}$ avec $g \leq f$; en vertu de l'*hypercontinuité* de $\tilde{\mu}$, on peut rendre
ces intervalles suffisamment petits pour que $\tilde{\mu}(f - g) \leq \varepsilon$.

Remarque : C'est ici qu'intervient la condition $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ au lieu de $\tilde{\mu} \in \mathcal{PM}^+$.

En conséquence l'extension du lemme de convergence fine à des espaces plus généraux
que \mathcal{RS} ne s'appliquera qu'aux mesures.

1.4. Lemme d'approximation dans \mathcal{R}^+

$\forall f \in \mathcal{R}^+ \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad \forall \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{ES}$ tel que $g \leq f$ et $\tilde{\mu}(f - g) \leq \varepsilon$.

Dém : Soit $f \in \mathcal{R}^+$; soit $h \in \mathcal{E}^+$ tel que $h \leq f$ et $\|f - h\| \leq \varepsilon / \|\tilde{\mu}\|_*$;
soit $g \in \mathcal{ES}$ tel que $g \leq h$ et $\tilde{\mu}(h - g) \leq \varepsilon$; alors on a $g \leq f$ et
 $\tilde{\mu}(f - g) = \tilde{\mu}(f - h) + \tilde{\mu}(h - g) \leq 2\varepsilon$.

1.5. Lemme de convergence fine dans \mathcal{R}^+

Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$;
en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) = \|f_n \tilde{\mu}\|_* \rightarrow 0$.

Dém :

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$; choisissons $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \in \mathcal{ES}$
tel que $g_n \leq f_n$ et $\tilde{\mu}(f_n - g_n) \leq \varepsilon_n$;

on a $g_n \xrightarrow{b} 0$, donc $g_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$; on peut écrire $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left\| (f_n \vee f_{n+1} \vee \dots \vee f_{n+p}) \tilde{\mu} - (g_n \vee g_{n+1} \vee \dots \vee g_{n+p}) \tilde{\mu} \right\|_{\star} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}(f_{n+r} - g_{n+r}) \\ & \leq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_{n+r} = \sum_{r=n}^{\infty} \varepsilon_r ; \end{aligned}$$

$$\text{donc quand } p \rightarrow +\infty \quad \left\| \text{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p} \tilde{\mu}) - \text{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (g_{n+p} \tilde{\mu}) \right\|_{\star} \leq \sum_{r=n}^{\infty} \varepsilon_r ;$$

$$\text{donc quand } n \rightarrow +\infty \quad \overline{\text{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu}) = \overline{\text{Lim}}_n (g_n \tilde{\mu}) = 0.$$

1.6. Corollaire : Théorème de Lebesgue dans \mathcal{R}

Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{R}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} f \tilde{\mu}$;
en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) \rightarrow \tilde{\mu}(f)$.

Dém : On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n \tilde{\mu} - f \tilde{\mu}| \leq |f_n - f| |\tilde{\mu}|$; or $|f_n - f| \xrightarrow{b} 0$,
donc $|f_n - f| |\tilde{\mu}| \xrightarrow{x} 0$, donc $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} f \tilde{\mu}$.

§ 2. Fonctions pseudo-réglées. Théorème de Lebesgue dans \mathcal{PR}

Supposons $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$; pour l'instant le produit $f \tilde{\mu}$ et le réel $\tilde{\mu}(f)$ n'ont de sens que
si $f \in \mathcal{R}$; ce paragraphe et le suivant vont nous permettre d'étendre la validité de ces
expressions à des fonctions f de plus en plus générales.

2.1.* Théorème :

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour une fonction $f \in \mathcal{F}$:

- 1) Il existe une suite $f_n \in \mathcal{E}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f$.
- 2) Il existe une suite $f_n \in \mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f$.

2.2. Définition : Une fonction $f \in \mathcal{F}$ qui vérifie ces propriétés est dite pseudo-réglée.

On note $\mathcal{PR} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ pseudo-réglée}\} \supset \mathcal{R}$.

2.3.* Théorème : \mathcal{PR} est une sous-algèbre cohérente de \mathcal{F} .

2.4. Théorème : $\mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$.

Dém : On a $\mathcal{S} = (\mathcal{ES})_{\downarrow}$; or $\mathcal{ES} \subset \mathcal{E}^+$, donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$.

2.5. Théorème de fermeture uniforme (Baire [1] p. 112-114)

Soit Ω un ensemble quelconque ; on note $\mathcal{F}(\Omega)$ l'espace de Riesz des fonctions *bornées* de Ω dans \mathbb{R} . Soit V un sous-espace cohérent de $\mathcal{F}(\Omega)$ tel que $\mathbf{1} \in V$; on note \widehat{V} le sous-espace des fonctions $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ pour lesquelles il existe une suite $f_n \in V$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f$. Alors \widehat{V} est fermé pour la convergence uniforme .

Ce théorème se démontre à l'aide de deux lemmes .

Lemme 1 : Soit une suite $f_n \in \mathcal{F}(\Omega)$ telle que $f_n \xrightarrow{u} f \in \mathcal{F}(\Omega)$ et soit une suite décroissante $\varepsilon_n > 0$; alors il existe une sous-suite f_{n_p} telle que $\|f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\| \leq \varepsilon_p$.

Dém :

On choisit une suite croissante $n_p \in \mathbb{N}$ telle que $\forall p \in \mathbb{N} \quad \|f_{n_p} - f\| \leq \varepsilon_p/2$;
on a alors $\forall p \in \mathbb{N} \quad \|f_{n_{p+1}} - f_{n_p}\| \leq \|f_{n_{p+1}} - f\| + \|f_{n_p} - f\| \leq \varepsilon_{p+1}/2 + \varepsilon_p/2 \leq \varepsilon_p$.

Lemme 2 : Soit une suite $f_n \in \widehat{V}$; alors il existe des suites $g_{n,p} \in V$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} \xrightarrow{b} f_n$ et $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad \|g_{n+1,p} - g_{n,p}\| \leq \|f_{n+1} - f_n\|$.

Dém :

Choisissons $\forall n \in \mathbb{N}$ une suite $f_{n,p} \in V$ telle que $f_{n,p} \xrightarrow{b} f_n$; on pose $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\alpha_n = \|f_{n+1} - f_n\|$ et on définit $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_{0,p} &= f_{0,p} \\ g_{1,p} &= g_{0,p} + (-\alpha_0) \vee (f_{1,p} - g_{0,p}) \wedge \alpha_0 \\ g_{2,p} &= g_{1,p} + (-\alpha_1) \vee (f_{2,p} - g_{1,p}) \wedge \alpha_1 \\ g_{3,p} &= g_{2,p} + (-\alpha_2) \vee (f_{3,p} - g_{2,p}) \wedge \alpha_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a bien $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} \in V$ et $\|g_{n+1,p} - g_{n,p}\| \leq \alpha_n = \|f_{n+1} - f_n\|$;
par ailleurs on peut écrire quand $p \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} g_{0,p} &\xrightarrow{b} f_0 \\ g_{1,p} &\xrightarrow{b} f_0 + (-\alpha_0) \vee (f_1 - f_0) \wedge \alpha_0 = f_0 + (f_1 - f_0) = f_1 \quad \text{car} \quad -\alpha_0 \leq f_1 - f_0 \leq \alpha_0 \end{aligned}$$

$$g_{2,p} \xrightarrow{b} f_1 + (-\alpha_1) \vee (f_2 - f_1) \wedge \alpha_1 = f_1 + (f_2 - f_1) = f_2 \quad \text{car} \quad -\alpha_1 \leq f_2 - f_1 \leq \alpha_1$$

$$g_{3,p} \xrightarrow{b} f_2 + (-\alpha_2) \vee (f_3 - f_2) \wedge \alpha_2 = f_2 + (f_3 - f_2) = f_3 \quad \text{car} \quad -\alpha_2 \leq f_3 - f_2 \leq \alpha_2$$

.....
.....

Démonstration du théorème :

Soit la suite $f_n \in \widehat{V}$ telle que $f_n \xrightarrow{u} f \in \mathcal{F}(\Omega)$; il faut montrer $f \in \widehat{V}$.

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$;

en vertu du lemme 1 on peut supposer $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_{n+1} - f_n\| \leq \varepsilon_n$; .

en vertu du lemme 2 il existe des suites $g_{n,p} \in V$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_{n,p} \xrightarrow{b} f_n \quad \text{et} \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \quad \|g_{n+1,p} - g_{n,p}\| \leq \|f_{n+1} - f_n\| \leq \varepsilon_n ;$$

nous allons prouver $g_{p,p} \xrightarrow{b} f$, ce qui démontrera le théorème.

Soit $\varepsilon > 0$; choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{r=N}^{\infty} \varepsilon_r \leq \varepsilon$ et $\|f_N - f\| \leq \varepsilon$;

$$\text{on a} \quad \forall p > N \quad g_{p,p} - f = (g_{N,p} - f_N) + (f_N - f) \\ + (g_{N+1,p} - g_{N,p}) + (g_{N+2,p} - g_{N+1,p}) + \dots + (g_{p,p} - g_{p-1,p}),$$

$$\text{donc} \quad |g_{p,p} - f| = |g_{N,p} - f_N| + \|f_N - f\| + \sum_{r=N}^{p-1} \varepsilon_r \leq |g_{N,p} - f_N| + 2\varepsilon ;$$

on trouve donc $\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} |g_{p,p} - f| \leq 2\varepsilon$; comme ε est arbitraire on en déduit

$$g_{p,p} \xrightarrow{o} f ; \quad \text{de plus on a} \quad \forall p > N \quad g_{p,p} = g_{N,p} + (g_{N+1,p} - g_{N,p}) \\ + (g_{N+2,p} - g_{N+1,p}) + \dots + (g_{p,p} - g_{p-1,p}),$$

$$\text{donc} \quad \|g_{p,p}\| \leq \|g_{N,p}\| + \sum_{r=N}^{p-1} \varepsilon_r \leq \|g_{N,p}\| + \varepsilon ; \quad \text{comme } g_{N,p} \text{ est une suite bornée}$$

il en est de même de la suite $g_{p,p}$, donc $g_{p,p} \xrightarrow{b} f$.

2.6.* Corollaire : \mathcal{PR} est un espace de Riesz-Banach pour la convergence uniforme.

2.7. Théorème d'extension

Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{PR}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M} \quad f_n \tilde{\mu}$ converge finement dans \mathcal{M} vers une limite qui ne dépend que de f (et non de la suite f_n).

Dém : La suite $f_n \tilde{\mu}$ est dominée car la suite f_n est bornée ; soit $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\phi}_n = \text{Inf}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p} \tilde{\mu}) \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_n = \text{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p} \tilde{\mu}) \in \mathcal{M} ; \quad \text{posons} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

$$g_{np} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \dots \wedge f_{n+p} \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad h_{np} = f_n \vee f_{n+1} \vee \dots \vee f_{n+p} \in \mathcal{R}.$$

Pour n fixé on a $g_{np} \tilde{\mu} \xrightarrow{*} \tilde{\phi}_n$ et $h_{np} \tilde{\mu} \xrightarrow{*} \tilde{\psi}_n$ quand $p \rightarrow +\infty$; soit $\varepsilon > 0$
et $\forall n \in \mathbb{N}$ choisissons $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|\tilde{\phi}_n - g_{np} \tilde{\mu}\|_* \leq \varepsilon$ et $\|\tilde{\psi}_n - h_{np} \tilde{\mu}\|_* \leq \varepsilon$;
on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n = g_{np}$ et $h_n = h_{np}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\inf_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p}$; or $\inf_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \xrightarrow{\circ} f$

et $\sup_{p \in \mathbb{N}} f_{n+p} \xrightarrow{\circ} f$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc $g_n \xrightarrow{b} f$ et $h_n \xrightarrow{b} f$;

on en déduit $k_n = h_n - g_n \xrightarrow{b} 0$; donc $k_n \tilde{\mu} \xrightarrow{*} 0$; or on peut écrire

$$\|\tilde{\psi}_n - \tilde{\phi}_n\|_* \leq \|\tilde{\psi}_n - h_n \tilde{\mu}\|_* + \|k_n \tilde{\mu}\|_* + \|\tilde{\phi}_n - g_n \tilde{\mu}\|_* \leq \|k_n \tilde{\mu}\|_* + 2\varepsilon,$$

donc $\left\| \overline{\text{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu}) - \underline{\text{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu}) \right\|_* \leq 2\varepsilon$; on a donc $\overline{\text{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu}) = \underline{\text{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu})$,

ce qui prouve que la suite $f_n \tilde{\mu}$ converge finement dans \mathcal{M} .

Montrons que cette limite ne dépend pas de la suite f_n mais seulement de f ;

soit une suite $\varphi_n \in \mathcal{R}$ telle que $\varphi_n \xrightarrow{b} f$; on a $\varphi_n - f_n \xrightarrow{b} 0$, donc $(\varphi_n - f_n) \tilde{\mu} \xrightarrow{*} 0$,

donc $\text{Lim}_n (\varphi_n \tilde{\mu}) = \text{Lim}_n (f_n \tilde{\mu})$.

2.8. Définition : $\forall f \in \mathcal{PR}$ $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ nous pouvons donc définir $f \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ de la
manière suivante : $f \tilde{\mu} = \text{Lim}_n (f_n \tilde{\mu})$ où f_n est n'importe quelle suite dans \mathcal{R}
telle que $f_n \xrightarrow{b} f$.

2.9. Définition : Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ s'étend canoniquement à \mathcal{PR} en posant

$$\forall f \in \mathcal{PR} \quad \tilde{\mu}(f) = (f \tilde{\mu})(\mathbb{1}).$$

2.10.* Théorème : $\forall f \in \mathcal{PR}$ $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $\tilde{\mu}(f) = \lim_n \tilde{\mu}(f_n)$ où f_n est
n'importe quelle suite dans \mathcal{R} telle que $f_n \xrightarrow{b} f$.

2.11.* Théorème : $\forall f \in \mathcal{PR}$ $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a 1) $|f \tilde{\mu}| = |f| |\tilde{\mu}|$

$$2) |\tilde{\mu}(f)| \leq |\tilde{\mu}|(|f|) \leq \|\tilde{\mu}\|_* \|f\|$$

$$3) \|f \tilde{\mu}\|_* \leq \|f\| \|\tilde{\mu}\|_*$$

2.12.* Théorème : \mathcal{M} , \mathcal{M}_D , \mathcal{L}^1 sont des domaines de Riesz sur \mathcal{PR} .

2.13. Lemme de convergence fine dans \mathcal{S}

Soit $f \in \mathcal{S}$ et soit une suite $f_n \in \mathcal{S}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$; en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) = \|f_n \tilde{\mu}\|_* \rightarrow 0$.

Dém : Même démonstration que dans \mathcal{RS} .

2.14. Lemme d'approximation dans \mathcal{PR}^+

$\forall f \in \mathcal{PR}^+ \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad \forall \varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $g \leq f$ et $\tilde{\mu}(f - g) \leq \varepsilon$.

Dém : Soit une suite $f_n \in \mathcal{R}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f$;

par définition de $f \tilde{\mu}$ on a $\text{Inf}_{p \in \mathbb{N}} (f_{n+p} \tilde{\mu}) \xrightarrow{*} f \tilde{\mu}$; en négligeant éventuellement un nombre

fini de termes de la suite f_n on peut dès lors supposer $\left\| f \tilde{\mu} - \text{Inf}_{n \in \mathbb{N}} (f_n \tilde{\mu}) \right\|_* \leq \varepsilon$.

Posons $\phi = \text{inf}_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{PR}^+$; on a $\phi \leq f$; de plus par définition de $\phi \tilde{\mu}$ on a

$\phi \tilde{\mu} = \text{Inf}_{n \in \mathbb{N}} (f_n \tilde{\mu})$, donc $\tilde{\mu}(f - \phi) \leq \varepsilon$.

Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n \in \mathcal{ES}$ tel que

$g_n \leq f_n$ et $\tilde{\mu}(f_n - g_n) \leq \varepsilon_n$; posons $g = \text{inf}_{n \in \mathbb{N}} g_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$;

on a $g \leq \phi \leq f$ et par définition de $\tilde{\mu}(\phi - g)$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\phi - g) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}(f_0 \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_n - g_0 \wedge g_1 \wedge \dots \wedge g_n) \leq \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}(f_r - g_r) \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r \leq \varepsilon ; \text{ on en déduit } \tilde{\mu}(f - g) \leq \tilde{\mu}(f - \phi) + \tilde{\mu}(\phi - g) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

2.15. Lemme de convergence fine dans \mathcal{PR}^+

Soit une suite $f_n \in \mathcal{PR}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$; en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) = \|f_n \tilde{\mu}\|_* \rightarrow 0$.

Dém : Même démonstration que dans \mathcal{R}^+ .

2.16. Corollaire : Théorème de Lebesgue dans \mathcal{PR}

Soit une suite $f_n \in \mathcal{PR}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{PR}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} f \tilde{\mu}$; en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) \rightarrow \tilde{\mu}(f)$.

Dém : Même démonstration que dans \mathcal{R} .

§ 3. Fonctions universelles . Théorème de Lebesgue dans \mathcal{W}

3.1. Définition : Une fonction $f \in \mathcal{F}$ est universelle ssi

$$\boxed{\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{il existe } g, h \in \mathcal{PR} \text{ tels que } g \leq f \leq h \text{ et } \tilde{\mu}(h - g) \leq \varepsilon .}$$

On note $\mathcal{W} = \{ f \in \mathcal{F} \mid f \text{ universelle} \} \supset \mathcal{PR}$.

3.2.* Théorème : \mathcal{W} est une sous-algèbre cohérente de \mathcal{F} .

3.3. Théorème de complétude de \mathcal{W} : $\boxed{\text{Soit } f_n \in \mathcal{W}, f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{F}; \text{ alors } f \in \mathcal{W} .}$

Dém : On peut supposer f_n monotone car $\lim_n f_n = \sup_n \left(\inf_p f_{n+p} \right)$.

a) f_n décroissante

Il est loisible de supposer $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \mathcal{W}^+$; soit $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ et $\varepsilon > 0$;

soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$; soient $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n, h_n \in \mathcal{PR}^+$

tels que $g_n \leq f_n \leq h_n$ et $\tilde{\mu}(h_n - g_n) \leq \varepsilon_n$; soit enfin $\forall n \in \mathbb{N} \quad k_n \in \mathcal{S}$ tel que

$k_n \leq g_n$ et $\tilde{\mu}(g_n - k_n) \leq \varepsilon_n$; on a donc $\tilde{\mu}(h_n - k_n) \leq 2\varepsilon_n$; posons $\forall n \in \mathbb{N}$

$H_n = h_0 \wedge h_1 \dots \wedge h_n \in \mathcal{PR}^+$ et $K_n = k_0 \wedge k_1 \dots \wedge k_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$; posons de plus

$K = \inf_n k_n \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PR}^+$; on a $K_n \xrightarrow{b} K$, donc $\tilde{\mu}(K_n - K) \rightarrow 0$; soit $N \in \mathbb{N}$

tel que $\tilde{\mu}(K_N - K) \leq \varepsilon$; on a $K \leq f \leq H_N$ et $K \leq K_N \leq H_N$; on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(H_N - K) &= \tilde{\mu}(H_N - K_N) + \tilde{\mu}(K_N - K) \leq \sum_{r=0}^N \tilde{\mu}(h_r - k_r) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} 2\varepsilon_r + \varepsilon \leq 3\varepsilon; \text{ donc } f \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

b) f_n croissante

On raisonne sur la suite $-f_n$ qui est décroissante; donc $-f \in \mathcal{W}$, donc $f \in \mathcal{W}$.

3.4.* Corollaire : \mathcal{W} est un espace de Riesz-Banach pour la convergence uniforme.

3.5. Définition : Une fonction est universellement mesurable ssi elle est limite simple d'une suite de fonctions universelles.

On note $\widehat{\mathcal{W}} = \{ f \in \widehat{\mathcal{F}} \mid f \text{ universellement mesurable} \}$.

3.6. Théorème de complétude de $\widehat{\mathcal{W}}$: $\boxed{\text{Soit } f_n \in \widehat{\mathcal{W}}, f_n \xrightarrow{o} f \in \widehat{\mathcal{F}}; \text{ alors } f \in \widehat{\mathcal{W}} .}$

Dém : Soit une suite $f_n \in \widehat{\mathcal{W}}$ telle que $f_n \xrightarrow{\circ} f \in \widehat{\mathcal{F}}$; alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$
 $(-k) \vee f_n \wedge k \in \mathcal{W}$ et $(-k) \vee f_n \wedge k \xrightarrow{b} (-k) \vee f \wedge k$, donc $(-k) \vee f \wedge k \in \mathcal{W}$;
par ailleurs $(-k) \vee f \wedge k \rightarrow f$, donc $f \in \widehat{\mathcal{W}}$.

3.7.* Théorème : $\widehat{\mathcal{W}}$ est un sous-espace cohérent de $\widehat{\mathcal{F}}$.

3.8. Définition : $\forall f \in \mathcal{W} \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on définit $f \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ en posant

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad f \tilde{\mu} &= \sup_{g \in \mathcal{PR}, g \leq f} (g \tilde{\mu}) = \inf_{h \in \mathcal{PR}, h \geq f} (h \tilde{\mu}) \\ \bullet \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M} \quad f \tilde{\mu} &= f \tilde{\mu}^+ - f \tilde{\mu}^- \end{aligned}$$

3.9. Définition : Tout $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ s'étend canoniquement à \mathcal{W} en posant $\forall f \in \mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+ \quad \tilde{\mu}(f) &= (f \tilde{\mu})(\mathbb{1}) = \sup_{g \in \mathcal{PR}, g \leq f} \tilde{\mu}(g) = \inf_{h \in \mathcal{PR}, h \geq f} \tilde{\mu}(h) \\ \bullet \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M} \quad \tilde{\mu}(f) &= (f \tilde{\mu})(\mathbb{1}) = \tilde{\mu}^+(f) - \tilde{\mu}^-(f) \end{aligned}$$

Notation intégrale :

$$\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M} \quad \forall f \in \mathcal{W} \quad \text{on note} \quad \tilde{\mu}(f) = \int_a^b (f \tilde{\mu})(x) = \int_a^b f(x) \tilde{\mu}(x).$$

3.10.* Théorème : $\forall f \in \mathcal{W} \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a 1) $|f \tilde{\mu}| = |f| |\tilde{\mu}|$
2) $|\tilde{\mu}(f)| \leq |\tilde{\mu}|(|f|) \leq \|\tilde{\mu}\|_* \|f\|$
3) $\|f \tilde{\mu}\|_* \leq \|f\| \|\tilde{\mu}\|_*$

3.11.* Théorème : $\mathcal{M}, \mathcal{M}_D, \mathcal{L}^1$ sont des domaines de Riesz sur \mathcal{W} .

3.12. Lemme de convergence fine dans \mathcal{W}^+

Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}^+$ telle que $f_n \xrightarrow{b} 0$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^+$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$;
en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) = \|f_n \tilde{\mu}\|_* \rightarrow 0$.

Dém : Soit une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$;
soient $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n, h_n \in \mathcal{PR}^+$ tels que $g_n \leq f_n \leq h_n$ et $\tilde{\mu}(h_n - g_n) \leq \varepsilon_n$;
on a $g_n \xrightarrow{b} 0$, donc $g_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} 0$; on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (h_{n+p} \tilde{\mu}) - \operatorname{Sup}_{p \in \mathbb{N}} (g_{n+p} \tilde{\mu}) \right\|_{\star} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_{n+r} = \sum_{r=n}^{\infty} \varepsilon_r,$$

donc quand $n \rightarrow +\infty$ $\overline{\operatorname{Lim}}_n (h_n \tilde{\mu}) = \overline{\operatorname{Lim}}_n (g_n \tilde{\mu}) = 0$;

or on a $\overline{\operatorname{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu}) \leq \overline{\operatorname{Lim}}_n (h_n \tilde{\mu})$, donc $\overline{\operatorname{Lim}}_n (f_n \tilde{\mu}) = 0$.

3.13. Corollaire : Théorème de Lebesgue dans \mathcal{W}

Soit une suite $f_n \in \mathcal{W}$ telle que $f_n \xrightarrow{b} f \in \mathcal{W}$; alors $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$ on a $f_n \tilde{\mu} \xrightarrow{x} f \tilde{\mu}$;
en conséquence $\tilde{\mu}(f_n) \rightarrow \tilde{\mu}(f)$.

Dém : Même démonstration que dans \mathcal{R} .

Remarques finales : Notre version du théorème de Lebesgue paraît a priori moins générale que la version classique ; ce n'est qu'une illusion ! En effet :

1) Nous supposons la convergence *partout* au lieu de la convergence *presque partout*.

Il suffit simplement de décider que les fonctions de la suite sont nulles aux points où il n'y a pas convergence pour se retrouver dans le cas de la convergence partout.

2) Nous supposons la convergence *bornée* au lieu de la convergence *dominée*.

Soit donc une suite de fonctions f_n convergeant partout vers une fonction f , et soit F une fonction positive sommable pour $\tilde{\mu}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \leq F$; on peut supposer $\forall x \in [a, b] \quad F(x) > 0$; comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{f_n}{F} \leq 1$, en appliquant la version "bornée" du théorème de Lebesgue à la suite $\frac{f_n}{F}$ et à la mesure $F \tilde{\mu}$, on obtient

$$\int_a^b f_n \tilde{\mu} = \int_a^b \frac{f_n}{F} F \tilde{\mu} \rightarrow \int_a^b \frac{f}{F} F \tilde{\mu} = \int_a^b f \tilde{\mu}.$$

3) Remarquons aussi que nous formulons le théorème de Lebesgue de manière plus précise qu'il n'est d'usage, puisque nous affirmons la *convergence fine des mesures* $f_n \tilde{\mu}$ et pas seulement la convergence des intégrales $\tilde{\mu}(f_n) = \int_a^b f_n \tilde{\mu}$.

Remarque pédagogique : Comme on a pu le constater, le théorème de convergence dominée reste, malgré toutes nos tentatives de simplification, un théorème relativement ardu à démontrer (contrairement au théorème de convergence monotone). En conséquence, son introduction récente et généralisée dans le premier cycle des universités et en classes préparatoires, sous prétexte de donner aux étudiants des outils "puissants"

et de leur faire “gagner du temps”, paraît inopportune. Utiliser des théorèmes dont on ne maîtrise ni la formulation ni la démonstration n’est sûrement pas la meilleure manière de développer un esprit scientifique de qualité.

Il est, à notre avis, bien plus formateur de traiter les problèmes relatifs à la permutation des limites et des intégrales, et donc aussi des intégrales entre elles, par des théorèmes de convergence ou de continuité uniformes ; de tels procédés sont certes moins puissants et moins élégants, mais ils permettent de justifier simplement et complètement toutes les “manoeuvres” que l’on est amené à pratiquer sur des expressions intégrales concrètes. Ces méthodes donnent en outre l’occasion d’appliquer intensivement les techniques fondamentales de l’analyse, résumées dans la célèbre formule de Jean Dieudonné : “majorer, minorer, comparer”.

Bien entendu notre intention n’est pas de dénigrer l’intégrale de Lebesgue en général, ni notre travail en particulier ! Cette théorie et ses applications trouvent leur place naturelle en dernière année de Licence ou en Maîtrise, où elles permettent d’atteindre “d’un bond” un niveau de généralisation, de sophistication et *in fine* de simplification de l’analyse, tel que les potentialités de celle-ci en sont multipliées de manière phénoménale.

Mais ce surcroît de sens et de puissance a un prix : la plus grande abstraction des concepts de base de la théorie, dont on imagine mal qu’ils puissent avoir une quelconque signification pour les étudiants des deux premières années de l’enseignement supérieur. Ce handicap apparaît d’autant plus insurmontable quand on considère avec quel bagage mathématique réduit les élèves entrent désormais à l’université ou en Math Sup, compte tenu des “allègements” drastiques subis depuis vingt-cinq ans par les horaires, les programmes et les exigences dans les enseignements primaire et secondaire.

Récapitulatif : Pour améliorer la compréhension de notre théorie, nous présentons dès maintenant le schéma complet d'inclusion des principaux espaces de fonctions, fonctionnelles, mesures et pseudo-mesures sur $[a,b]$, déjà définis dans les chapitres précédents ou à définir dans les chapitres suivants :

