CONVENTIONS GENERALES

En l'absence d'indications contraires, tous les espaces vectoriels, et donc aussi toutes les algèbres, sont réel(le)s.

Les théorèmes dont les numéros sont suivis d'une astérisque (*) sont donnés sans démonstration, soit parce que la démonstration est triviale, soit parce que le théorème constitue l'adaptation ou la généralisation naturelle d'un théorème précédent déjà démontré.

Remarque sur le critère de Cauchy

Cela fait environ 180 ans que l'on énonce le critère de Cauchy, par exemple dans un espace vectoriel normé E, sous la forme suivante :

Une suite $x_n \in \mathsf{E}$ est de Cauchy ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\boxed{\forall\, p\,,\, q \geq N \quad \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon} . \quad (*)$$

On se demande bien pourquoi on n'a jamais pris l'habitude de l'exprimer plus simplement de la manière suivante :

Une suite $x_n \in \mathsf{E}$ est de Cauchy ssi $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\boxed{\forall\, p > N \quad \|x_p - x_N\| \leq \varepsilon} . \quad (**)$$

Certes, la version classique (*) est plus symétrique et peut se révéler à l'occasion techniquement plus avantageuse. Mais dans l'immense majorité des cas on rend un bien mauvais service à la jeunesse étudiante, ainsi d'ailleurs qu'aux mathématiques, en privilégiant un énoncé manifestement redondant. Nous utiliserons donc essentiellement la version courte (**).