ANNEXE

PARTIES TOTALEMENT BORNEES DE $\mathcal{L}^1$

Soit V un espace de Banach.

Définition : Une partie de V est bornée ssi elle est incluse à une boule de V.

Définition : Une partie de V est totalement bornée ssi $\forall \epsilon > 0$ elle est incluse à une réunion finie de boules de V de rayon ϵ.

Une partie totalement bornée est évidemment bornée.

Théorème fondamental : Une partie bornée A de $\mathcal{L}^1$ est totalement bornée ssi $\forall \epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

1°) $\boxed{\forall \tilde{f} \in A \ \int_a^{a+\delta} \big|\tilde{f}\big|(x)\,dx \leq \epsilon}$ et $\boxed{\forall \tilde{f} \in A \ \int_{b-\delta}^{b} \big|\tilde{f}\big|(x)\,dx \leq \epsilon}$

2°) $\boxed{\forall \tilde{f} \in A \ \ \forall h \in \mathcal{E} \ \ \forall u \in [-\delta, \delta] \ \ \left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,\tilde{f}(x)\,dx\right| \leq \epsilon\,\|h\|}$.

Dém :

a) $\Rightarrow$: Soient $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{E}$; soit $\epsilon > 0$ et soit $g \in \mathcal{C}$ tel que $\big\|\tilde{f} - g\big\|_1 \leq \epsilon$; on a $\forall u \in [-\delta, \delta]$

$$\left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,\tilde{f}(x)\,dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,g(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,\big[\tilde{f}(x) - g(x)\big]\,dx\right| \leq 2\,\|h\|\,\big\|\tilde{f} - g\big\|_1 \leq 2\,\epsilon\,\|h\| \text{ ; de plus}$$

$$\left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,g(x)\,dx\right| = \left|\int_{a+\delta+u}^{b-\delta+u} h(x)\,g(x-u)\,dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} h(x)\,g(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} h(x)\big[g(x-u) - g(x)\big]\,dx\right| + \left|\int_{a+\delta}^{a+\delta+u} h(x)\,g(x-u)\,dx\right|$$

$$+ \left|\int_{b-\delta+u}^{b-\delta} h(x)\,g(x-u)\,dx\right| \leq \|h\| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big|g(x-u) - g(x)\big|\,dx \ + \ 2\,\delta\,\|g\|\,\|h\| \text{ ;}$$

soit $0 < \delta < \dfrac{\epsilon}{\|g\|}$ tel que $\left[|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow \big|g(x_1) - g(x_2)\big| \leq \dfrac{\epsilon}{b-a}\right]$;

alors $\forall u \in [-\delta, \delta]$ $\left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,g(x)\,dx\right| \leq 3\,\epsilon\,\|h\|$,

donc $\forall u \in [-\delta, \delta]$ $\left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x)\big]\,\tilde{f}(x)\,dx\right| \leq 5\,\epsilon\,\|h\|$.

Choisissons dans $\mathcal{L}^1$ un ensemble fini de boules, de centres $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_n$ et de rayon ϵ, recouvrant A ; on peut choisir en vertu de ce qui précède $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, i \in [[1,n]] \quad \forall\, h \in \mathcal{E} \quad \forall\, u \in [-\delta, \delta] \quad \left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x) \big] \tilde{f}_i(x)\, dx \right| \le \epsilon \, \| h \| \ ;$$

en réduisant éventuellement δ on peut exiger en outre

$$\forall\, i \in [[1,n]] \quad \int_a^{a+\delta} \big| \tilde{f}_i \big|(x)\, dx \le \epsilon \quad \text{et} \quad \int_{b-\delta}^{b} \big| \tilde{f}_i \big|(x)\, dx \le \epsilon \, .$$

Soit $\tilde{f} \in A$ et soit $i \in [[1,n]]$ tel que $\| \tilde{f} - \tilde{f}_i \|_1 \le \epsilon$;

alors $\forall\, h \in \mathcal{E} \ \ \forall\, u \in [-\delta, \delta] \quad \left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x) \big] \tilde{f}(x)\, dx \right|$

$$\le \left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x) \big] \tilde{f}_i(x)\, dx \right| + \left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big[h(x+u) - h(x) \big] \big[\tilde{f}(x) - \tilde{f}_i(x) \big]\, dx \right|$$

$$\le \epsilon \, \| h \| + 2\, \epsilon \, \| h \| = 3\, \epsilon \, \| h \| \, .$$

De plus on a $\displaystyle \int_a^{a+\delta} \big| \tilde{f} \big|(x)\, dx \le \int_a^{a+\delta} \big| \tilde{f}_i \big|(x)\, dx + \int_a^{a+\delta} \big| \tilde{f} - \tilde{f}_i \big|(x)\, dx \le 2\, \epsilon .$

b) $\Leftarrow$: Soit ϕ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dont le graphe est un triangle isocèle de base $[-\delta, \delta]$ et de hauteur $1/\delta$; on a donc $\displaystyle \int_{-\delta}^{\delta} \phi(u)\, du = 1 .$

$\forall \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ définissons la fonction de $\mathcal{C}$

$$\tilde{f} * \phi \ : \ [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \int_a^b \phi(x-u)\, \tilde{f}(u)\, du \, .$$

On a $\displaystyle \forall\, h \in \mathcal{E} \quad \int_a^b (\tilde{f} * \phi)(x)\, h(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_a^b \phi(x-u)\, h(x)\, dx \right] \tilde{f}(u)\, du$

$$= \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[\int_a^b \phi(x-u)\, h(x)\, dx \right] \tilde{f}(u)\, du + \underbrace{\int_a^{a+\delta} [\dots]\, \tilde{f}(u)\, du}_{K_1} + \underbrace{\int_{b-\delta}^{b} [\dots]\, \tilde{f}(u)\, du}_{L_1} .$$

De plus

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[\int_a^b \phi(x-u)\, h(x)\, dx \right] \tilde{f}(u)\, du = \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[\int_{u-\delta}^{u+\delta} \phi(x-u)\, h(x)\, dx \right] \tilde{f}(u)\, du$$

$$= \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[\int_{-\delta}^{\delta} \phi(v)\, h(v+u)\, dv \right] \tilde{f}(u)\, du = \int_{-\delta}^{\delta} \left[\int_{a+\delta}^{b-\delta} h(u+v)\, \tilde{f}(u)\, du \right] \phi(v)\, dv$$

On a aussi

$$\int_a^b h(x) \tilde{f}(x)\, dx = \int_{a+\delta}^{b-\delta} h(x) \tilde{f}(x)\, dx + \underbrace{\int_a^{a+\delta} h(x) \tilde{f}(x)\, dx}_{K_2} + \underbrace{\int_{b-\delta}^{b} h(x) \tilde{f}(x)\, dx}_{L_2} .$$

On peut donc écrire $\forall \tilde{f} \in A \quad \forall h \in \mathcal{E} \quad \left| \int_a^b h(x) \left[(\tilde{f} * \phi)(x) - \tilde{f}(x) \right] dx \right|$

$$\leq \left| \int_{-\delta}^{\delta} \left[\int_{a+\delta}^{b-\delta} h(u+v) \, \tilde{f}(u) \, du \right] \phi(v) \, dv - \int_{a+\delta}^{b-\delta} h(x) \, \tilde{f}(x) \, dx \right| + M$$

avec $M = |K_1| + |L_1| + |K_2| + |L_2|$.

Or on a $\left| \int_{-\delta}^{\delta} \left[\int_{a+\delta}^{b-\delta} h(u+v) \, \tilde{f}(u) \, du \right] \phi(v) \, dv - \int_{a+\delta}^{b-\delta} h(x) \, \tilde{f}(x) \, dx \right|$

$$= \left| \int_{-\delta}^{\delta} \left[\int_{a+\delta}^{b-\delta} h(u+v) \, \tilde{f}(u) \, du \right] \phi(v) \, dv - \int_{-\delta}^{\delta} \left[\int_{a+\delta}^{b-\delta} h(x) \, \tilde{f}(x) \, dx \right] \phi(v) \, dv \right|$$

$$= \left| \int_{-\delta}^{\delta} \left[\int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[h(x+v) - h(x) \right] \tilde{f}(x) \, dx \right] \phi(v) \, dv \right|$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[h(x+v) - h(x) \right] \tilde{f}(x) \, dx \right| \phi(v) \, dv \leq \epsilon \, \|h\| \quad \text{en vertu de la condition } 2^\circ).$$

Par ailleurs en vertu de la condition $1^\circ)$ on a clairement $M \leq 4 \, \epsilon \, \|h\|$; on en déduit

$\forall \tilde{f} \in A \quad \left| \int_a^b h(x) \left[(\tilde{f} * \phi)(x) - \tilde{f}(x) \right] dx \right| \leq 5 \, \epsilon \, \|h\|$, donc $\boxed{\|\tilde{f} * \phi - \tilde{f}\|_1 \leq 5 \, \epsilon}$;

or $\forall \tilde{f} \in A \quad \tilde{f} * \phi \in \mathcal{C}$; montrons que $A * \phi \subset \mathcal{C}$ est totalement borné dans $\mathcal{C}$, c-à-d d'après le théorème d'Ascoli :

* borné : $\left| (\tilde{f} * \phi)(x) \right| = \left| \int_a^b \phi(x-u) \, \tilde{f}(u) \, du \right| \leq \dfrac{1}{\delta} \, \|\tilde{f}\|_1$,

* équicontinu : $\left| (\tilde{f} * \phi)(x) - (\tilde{f} * \phi)(y) \right| = \left| \int_a^b \left[\phi(x-u) - \phi(y-u) \right] \tilde{f}(u) \, du \right|$

$$\leq \frac{1}{\delta^2} \, \|\tilde{f}\|_1 \, |x-y| .$$

$A * \phi$ peut donc être recouvert par un ensemble fini de boules de $\mathcal{C}$ de rayon $\dfrac{\epsilon}{b-a}$, elles-mêmes incluses aux boules de $\mathcal{L}^1$ de même centre et de rayon ϵ ; on peut donc recouvrir A par l'ensemble des boules de $\mathcal{L}^1$ de même centre que les précédentes et de rayon $6 \, \epsilon$.